ZADANIE:

Zbadać jakie funkcje uwikłane określa równanie $H=0$ w otoczeniu punktu p:

(a) $H: \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ $H(x,y,z) = xy - z\log y + e^{xz} - 1$
$p = (0,1,1)$

(b) $H: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $H(x,y,z) = \left(x^2(y^2+z^2)-5,\ (x-z)^2+y^2-2\right)$
$p = (1,-1,2)$

(a) Jedno równanie w przestrzeni trójwymiarowej może określić jedną zmienną jako funkcję dwóch pozostałych. Zgodnie z twierdzeniem o funkcjach uwikłanych (TFU) warunkiem istnienia różniczkowalnej funkcji uwikłanej w otoczeniu danego punktu jest nieznikanie w tym punkcie pochodnej cząstkowej funkcji zadającej równanie w kierunku zmiennej mającej być funkcją uwikłaną. W naszym przypadku mamy:

$$H(x,y,z) = xy - z\log y + e^{xz} - 1 = 0 \quad p = (0,1,1)$$

Sprawdzamy, czy p spełnia $H(p)=0$

$$\underbrace{0\cdot 1}_{0} - \underbrace{1\cdot\log 1}_{0} + \underbrace{e^{0\cdot 1}}_{1} - 1 = 0 \quad \text{O.K.}$$

Liczymy pochodne cząstkowe $\frac{\partial H}{\partial x} = y + ze^{xz}\Big|_p = 1+1 = 2$

$\frac{\partial H}{\partial y} = x - \frac{z}{y}\Big|_p = 0 - \frac{1}{1} + 0 = -1$ $\frac{\partial H}{\partial z} = -\log y + xe^{xz}\Big|_p = 0$

Równanie $H=0$ definiuje w otoczeniu p funkcje $(x,z) \mapsto y(x,z)$;

$(y,z) \mapsto x(y,z)$ natomiast nie definiuje funkcji $(x,y) \mapsto z(x,y)$

(b) $p=(1,-1,2)$

$$H(x,y,z) = \left(x^2(y^2+z^2)-5,\ (x-z)^2+y^2-2\right)$$

(w ogólnym przypadku)

Dwa równania w trójwymiarowej przestrzeni definiują krzywą. Rozważamy istnienie odwzorowań $x \mapsto (y(x), z(x))$, $y \mapsto (x(y), z(y))$ $z \mapsto (x(z), y(z))$

$H^1_x = 2x(y^2+z^2)\big|_p = 2\cdot 1(1+4) = 10$

$H^2_x = 2(x-z)\big|_p = 2(1-2) = -2$

$H^1_y = 2x^2y = -2$

$H^2_y = 2y = -2$

$H^1_z = 2zx^2 = 4$

$H^2_z = -2(x-z) = +2$

$$H^1_{xy} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} -20-4 \neq 0$$

$$H^1_{xz} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -2 & +2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} +20+8 \neq 0$$

$$H^1_{yz} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & +2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} -4+8 = 4 \neq 0$$

Równanie $H=0$ określa wszystkie trzy krzywe

$y \mapsto (x(y), z(y))$

$z \mapsto (x(z), y(z))$

$x \mapsto (y(x), z(x))$

$$xe^y + ye^x = 2 \qquad x \longmapsto y(x)$$

różniczkujemy po x

$$e^y + xe^y y' + y'e^x + ye^x = 0$$

$$y'(xe^y + e^x) + e^y + ye^x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$$

$$y''(xe^y + e^x) + y'(e^y + xe^y y' + e^x) + y'e^y + ye^x + y'e^x = 0$$

$$y'' = -\frac{(y')^2 e^y \overset{0}{x} + y'\overset{2+2e^2}{(e^y + e^x + e^y + e^x)} + \overset{2}{y}e^x}{\underset{\cdot 1}{(xe^y + e^x)}}$$

W $x=0$ $y(x)=2$

$$y'(0) = -\frac{e^2 + 2e^0}{0 \cdot e^2 + e^0} = -\frac{e^2+2}{1} = e^2+2$$

$$y''(0) = -\left[(e^2+2)(2+2e^2) + 2\right] =$$

$$= -2\left((e^2+2)(e^2+1)+1\right) = -2(e^4 + 3e^2 + 3)$$

ZADANIE:

Znaleźć pierwszą i drugą pochodną funkcji $x \longmapsto y(x)$ danej równaniem $xe^y + ye^x = 2$. Znaleźć wartości tej pochodnej dla $x = 0$

Znaleźć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji $(x,y) \longmapsto z(x,y)$ danej równaniem

$$F(x,y,z) = z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y = 0$$

w otoczeniu punktu $(0,1)$. Obliczyć wartości pochodnych w tym punkcie.

$$\frac{dF}{dx} = 2zz_x \cdot x + z^2 - 2xy + y^2z_x + 2 = 0 \Rightarrow z_x(2zx + y^2) = +2xy - z^2 - 2$$

$$z_x = \frac{2xy - z^2 + 2}{2zx + y^2} = \frac{-1-2}{1} = -3$$

$$\frac{dF}{dy} = 2zxz_y - x^2 + 2yz + y^2z_y - 1 = 0 \Rightarrow z_y(2zx + y^2) = x^2 - 2yz + 1$$

$$z_y = \frac{x^2 - 2yz + 1}{2zx + y^2} = \frac{-2+1}{1} = -1$$

$x=0,\ y=1 \quad F(0,1,z) = z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \quad z(0,1) = 1$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = z_{xx}2zx + 2z_x^2x + 2zz_x + 2zz_x - 2y + y^2z_{xx} = 0$$

$$z_{xx}(2zx + y^2) = -(2z_x^2x - 4zz_x + 2y)$$

$$z_{xx} = -\frac{2z_x^2x - 4zz_x + 2y}{2zx + y^2} = -\frac{-4\cdot 1\cdot(-3) + 2}{1} = -\frac{12+2}{1} = -14$$

$$\frac{d^2F}{dxdy} = 2z_yz_xx + 2zz_{xy}x - 2x + 2yz_x + y^2z_{xy} = 0$$

$$z_{xy}(2zx + y^2) = -(2z_yz_xx - 2x + 2yz_x)$$

$$z_{xy} = -\frac{2z_yz_xx - 2x + 2yz_x}{2zx + y^2} = -\frac{2\cdot(-3)}{1} = 6$$

z_{yy} liczą Państwo samodzielnie

$$\underbrace{(x+z)(y+z)\left(1+\frac{z}{xy}\right)}_{F(x,y,z)}=8$$

Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $(x,y)\longmapsto z(x,y)$ danych równaniem ...

$$F_x=(y+z)\left(1+\frac{z}{xy}\right)+(x+z)(y+z)\left(-\frac{z}{x^2y}\right)=(y+z)\left(1+\frac{z}{xy}-\frac{z}{x^2y}(x+z)\right)=$$

$$=(y+z)\left(1+\frac{z}{xy}-\frac{z}{xy}-\frac{z^2}{x^2y}\right)=(y+z)\left(1-\frac{z^2}{x^2y}\right)=0$$

$$F_y=(x+z)\left(1+\frac{z}{xy}\right)+(y+z)(x+z)\left(-\frac{z}{xy^2}\right)=(x+z)\left(1+\frac{z}{xy}-\frac{z}{xy^2}(y+z)\right)=$$

$$=(x+z)\left(1+\frac{z}{xy}-\frac{z}{xy}-\frac{z^2}{xy^2}\right)=(y+z)\left(1-\frac{z^2}{x^2y}\right)=0$$

$$F_z=(y+z)\left(1+\frac{z}{xy}\right)+(x+z)\left(1+\frac{z}{xy}\right)+\frac{1}{xy}(x+z)(y+z)$$

$y=-z$ lub $1=\frac{z^2}{x^2y}$ $\quad x^2y=z^2$

$x=-z$ lub $1=\frac{z^2}{xy^2}$ $\quad xy^2=z^2$

$\Rightarrow x^2y=xy^2\Rightarrow x=y$

$z^2=x^3 \quad z=x^{3/2}$ lub $z=-x^{3/2}$

$x>0$

nie spełnia warunku $F(x,y,z)=8$

$$F(x,x,x^{3/2})=(x+x^{3/2})(x+x^{3/2})\left(1+\frac{x^{3/2}}{x^2}\right)=8$$

$$x^2(1+\sqrt{x})^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=8 \quad /\cdot\sqrt{x}$$

$$x\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3=8$$

$$\sqrt{x}(1+\sqrt{x})=2$$

$$(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-2=0$$

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=1,\quad x=1$$

Pierwszy punkt krytyczny to:

$$F_z(1,1,1) = (y+z)\left(1+\frac{z}{xy}\right) + (x+z)\left(1+\frac{z}{xy}\right) + \frac{1}{xy}(x+z)(y+z)\Big|_{1,1,1} =$$

$$= 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 = 12$$

$$F_x = (y+z)\left(1-\frac{z^2}{x^2y}\right) \qquad F_{xx} = (y+z)\left(2\frac{z}{x^3y}\right) = 2\cdot 2 = 4$$

$$F_y = (x+z)\left(1-\frac{z^2}{xy^2}\right) \qquad F_{yy} = (x+z)\left(2\frac{z}{xy^3}\right) = 2\cdot 2 = 4$$

$$F_{xy} = \left(1-\frac{z^2}{x^2y}\right) + (y+z)\left(\frac{z^2}{x^2y^2}\right) = 2\cdot 1 = 2$$

Wyprowadzenie wzoru na drugą pochodną funkcji zadanej w sposób uwikłany równaniem $F(x,y,z)=0$ (funkcja $(x,y)\mapsto z(x,y)$) w punkcie krytycznym

$$F(x,y,z(x,y))=0$$

$$F_x + F_z z_x = 0 \rightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{punkt krytyczny}$$

$$F_y + F_z z_y = 0 \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z} \qquad z_x = F_x = 0 \quad z_y = F_y = 0$$

$$F_x + F_z z_x = 0$$

$$F_{xx} + F_{xz} \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_x} + F_{zx} \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_x} + F_{zz} \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_x}{}^2 + F_z z_{xx} = 0$$

$$F_{xx} + F_z z_{xx} = 0 \longrightarrow z_{xx} = -\frac{F_{xx}}{F_z}$$

$$F_y + F_z z_y = 0$$

$$F_{yy} + F_{yz} \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_y} + F_{zy} \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_y} + F_{zz} \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_y}{}^2 + F_z z_{yy} = 0$$

$$F_{yy} + F_z z_{yy} = 0 \longrightarrow z_{yy} = -\frac{F_{yy}}{F_z}$$

$$F_{yx} + F_{yz} \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_x} + F_{zx} \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_y} + F_{zz} z_x \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{z_y} + F_z z_{yx} = 0$$

$$F_{yx} + F_z z_{yx} = 0 \longrightarrow z_{yx} = -\frac{F_{yx}}{F_z}$$

W punkcie krytycznym (!)

$$z'' = -\frac{1}{F_z} \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix}$$

W naszym przypadku $z'' = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Badamy określoność formy danej macierzą $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $D_1 = -2 < 0$

$D_2 = 4-1 = 3 > 0$

Forma jest ujemnie określona. Punkt $(1,1)$ jest minimum funkcji $z(x,y)$.

Drugi punkt krytyczny związany jest z warunkiem $x=y$, $z = -x^{3/2}$

Oznacza to, że

$$(x - x\sqrt{x})^2 \left(1 - \frac{x\sqrt{x}}{x^2}\right) = 8$$

$$x^2 (1-\sqrt{x})^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 8$$

$$x\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2 (\sqrt{x}-1) = 8$$

$$x\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^3 = -8$$

$$\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x}) = -2$$

$-(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 2 = 0 \quad \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 2 = 0 \quad (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = 0 \quad \sqrt{x} = 2 \quad x = 4 = y$

$z = -8 \qquad (4,4,-8)$

$$F_z'(4,4,-8) = (y+z)\left(1 + \frac{z}{xy}\right) + (x+z)\left(1 + \frac{z}{xy}\right) + \frac{1}{xy}(x+z)(y+z)\Big|_{(4,4,-8)} =$$

$$= (-4)\left(1 - \frac{8}{16}\right) + (-4)\left(1 - \frac{8}{16}\right) + (-4)(-4) =$$

$$= -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 16 = -4 + 16 =$$

$$= -12 \neq 0$$

$$F_{xx} = (y+z)\left(2\frac{z}{x^3 y}\right) = (4-8)\left(2\frac{-8}{4^3\cdot 4}\right) = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{8}}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot 4} = \frac{1}{4}$$

$$F_{yy} = (x+z)\left(2\frac{z}{x y^3}\right) = (4-8)\left(2\cdot\frac{-8}{4^3\cdot 4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$F_{xy} = \left(1-\frac{z^2}{x^2 y}\right) + (y+z)\left(\frac{z^2}{x^2 y^2}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(1-\frac{64}{16\cdot 4}\right)}_{0} + (4-8)\left(\frac{64}{16\cdot 16}\right) = -\frac{4\cdot 64}{16\cdot 16} = -1$$

$$z''(4,4) = -\left(-\frac{1}{12}\right)\begin{bmatrix} 1/4 & -1 \\ -1 & 1/4 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{dodatnie}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{badamy tę macierz}}$$

$D_1 = 1 > 0$

$D_2 = 1-16 < 0$

sygnatura (+−)

siodło!