

ZADANIE 1:

Przedstawić kolejność całkowania w całości podwójnej iterowanej:

$$(a) \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f dy$$

Wskazówka: rysunki
mogą być pomocne

$$(b) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f dx$$

ZADANIE 2: Przedstawić całkę $I = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{\frac{x+y}{2}}^{2y-x} f dz$ w postaci całki iterowanej lub sumy takich kolejności całkowania

$$(a) \int dz \int dy \int f dx$$

$$(b) \int dx \int dz \int f dy$$

$$(c) \int dy \int dz \int f dx$$

$$(d) \int dz \int dx \int f dy$$

ZADANIE 3: Obliczyć całkę $\int_K f dA$:

$$(a) K = \{x^2 + y^2 \leq x\} \quad f(x, y) = \frac{|y|}{x} \quad (1/2)$$

$$(b) K = \{(x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2(x^2 + y^2), x \geq 0\} \quad f(x, y) = 1 \quad (a^2)$$

$$(c) K = \{x^2 + y^2 \leq a^2\} \quad f(x, y) = e^{x^2 + y^2} \quad ((e^{a^2} - 1)\pi)$$

ZADANIE 4: Obliczyć całkę w \mathbb{R}^3

(a) $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}$ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\frac{\sqrt{11}}{60}(96\sqrt{2} - 8)$

(b) $K = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2), x^2 \leq y \leq x\}$ $f(x, y, z) = 1$ $\frac{3}{35}$

ZADANIE 5: Obliczyć środek ciężkości obszaru (jednorodnego)

płaskiego $K = \{(x, y): x > 0, xy \geq 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 2\}$ przy $a, b > 0$
 $ab > 1$ danym

ZADANIE 6:

Dwa walce o jednakowym promieniu i nieskończonej długości przecinają się tak, że ich oś symetrii obrotowej przecinają się pod kątem $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

ZADANIE 7:

Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną kulką $B = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}$ o gęstości $\rho = 1$ a masę punktową m umieszczoną w punkcie $(0, 0, 1)$.

ZADANIE 1

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f dy$$



$$y > 0$$

$$\sqrt{2x-x^2} < y < \sqrt{2x}$$

$$y^2 < 2x \rightarrow x > \frac{y^2}{2}$$

$$2x - x^2 < y^2$$

$$x^2 - 2x + y^2 > 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 > 1$$

$$\int_0^1 dy \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f dx \right) + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 dx$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$(x-1)^2 = 1 - y^2$$

$$x-1 = \pm \sqrt{1-y^2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$$