

RÓWNANIA O ROZDZIELONYCH ZMIENNYCH ✓

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania:

$$y' = \frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)} \quad \text{Naszkicować krzywe opisane tym równaniem.}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cos(x-y) - \frac{1}{2} \cos(x+y)$$

$$y' = \cos(x+y) \quad \text{zamienić zmienne: } z(x) = x + y(x)$$

$$y' = ax + by + c \quad \text{zamienić zmienne}$$

RÓWNANIA LINIOWE RZĘDU PIERWSZEGO ✓

$$y' \cos x - y \sin x = 2x \quad y(0) = 0 \quad \text{Rozwiązać zagadnienie początkowe}$$

$$(2x - y^2) y' = 2y \quad \text{zamienić rolami zmienne}$$

$$y' + \sin y + x \cos y + x = 0 \quad z = \frac{1}{2} y^2$$

RÓWNANIA JEDNORODNE ✓

$$y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x},$$

$$y' = \left(\frac{y-1}{-2x-y-1} \right)^2 \quad \text{podstawić } x = \xi + 1 \quad y = \eta + 1$$

Znaleźć w obszarze $D: \{(x, y): x > 0\}$ krzywą $x \mapsto y(x)$ mającą tę własność, że w każdym jej punkcie odstęp stycznej od punktu $(0, 0)$ jest równy x .

Uogólnione jednorodne:

$$y' = \frac{2}{3} \left(y^2 - \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{jednorodne stopnia } -1, \quad y(x) = \frac{u(x)}{x}$$

$$y' = \frac{x+y^3}{3(x-y^3)y^2} \quad \text{jednorodne stopnia } \frac{1}{3} \quad y(x) = x^{1/3} u(x)$$

$$y' = \frac{y}{y^2+3x} \quad \text{stopnia } \frac{1}{2} \quad \dots$$

RÓWNANIE BERNOULLIEGO:

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$3xy^2y' = 2y^3 + x^3$$

$$z(x) = y^{1-n}(x)$$

$$y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y} \quad y(1) = 1$$

$$xy' + ay + by^2 \log x = 0, \quad x > 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

ROZWIĄZANIE JEDNEGO Z ZADAŃ

(zmiennie rozdzielone)

$$y' = \frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)}$$

Funkcja opisana takim równaniem może być osobliwa w $x = \pm 1$

Rozdzielamy zmiennie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)} \quad \frac{y dy}{(1-y^2)} = \frac{x dx}{1-x^2}$$

$$\int \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \log |1-x^2|$$

$$-\frac{1}{2} \log |1-y^2| = -\frac{1}{2} \log |1-x^2| + C$$

$$\log |1-y^2| = \log |1-x^2| + \log D$$

$$|(1-y^2)| = |(1-x^2)| \cdot D \quad D > 0$$

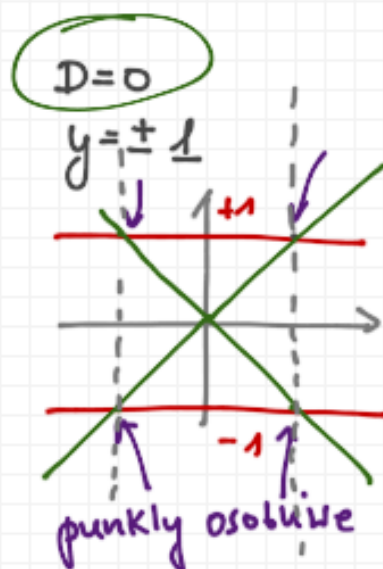
$$1-y^2 = (1-x^2) D$$

$$D = 1$$

$$y^2 - x^2 = 0$$

$$y = x$$

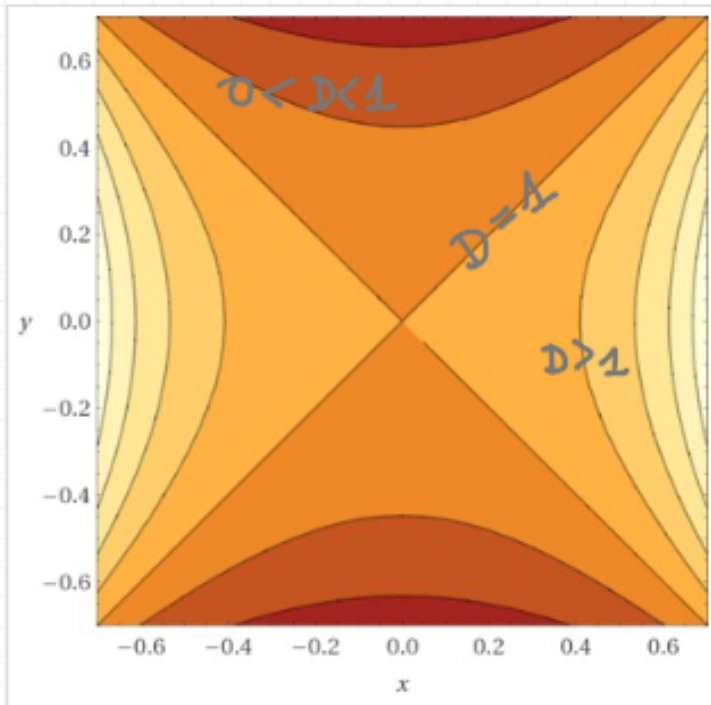
$$y = -x$$



Dla pozostałych wartości D mamy elipsę lub hiperbolę:

$$\frac{x^2}{1 - \frac{4}{D}} - \frac{y^2}{D-1} = 1$$

$D < 0 \rightarrow$ elipsa
 $0 < D < 1 \rightarrow$ hiperbola
 $D > 1 \rightarrow$ hiperbola



$|x| < 1$
 $|y| < 1$

$0 < x < 2$
 $0 < y < 2$

