Macierzowe 2×2

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \to (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = ad - bc - \lambda d - \lambda a + \lambda^2 = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$$

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A = 0$$

zespolone wartości własne

$\lambda^2 + 4 \rightsquigarrow \operatorname{tr} A = 0 \quad \det A = 4$

dwie różne wartości własne

$(\lambda-3)(\lambda-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \quad \det A = 6 \quad \operatorname{tr} = 5$

podwójna wartość własna

$(\lambda-2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \det A = 4 \quad \operatorname{tr} A = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ w. wł.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ warunki początkowe

Zadanie 1.

Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych liniowych

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = 2x(t) - 4y(t) \end{cases}$$

Rozwiązać zagadnienie początkowe dla $x(0) = 1$, $y(0) = 2$

Zadanie 2.

Rozwiązać zagadnienie początkowe dla układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) & x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) = -x(t) + 3y(t) & y(0) = 2 \end{cases}$$

Zadanie 3.

Znaleźć rozwiązanie ogólne

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 5y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + y(t) \end{cases}$$

Zadanie 4

Dla układu z zadania 2 znaleźć RSRN dla

$$b(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie zadania 2 i 4 oraz uwagi na temat wielokrotnych wartości własnych:

Macierz układu równań z zadania 2 ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne otrzymać można używając macierzy e^{At}. Obliczymy więc e^{At}, wyznaczymy rozwiązanie ogólne, znajdziemy także rozwiązanie zagadnienia początkowego bez wyznaczania e^{At}. Zastosujemy także uzmiennianie stałych, żeby rozwiązać zadanie 4.

ROZWIĄZANIE OGÓLNE:

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda \underline{I}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)+1 = \lambda^2 - 3\lambda - \lambda + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$$

$$Sp(A) = \{2\}$$

Korzystamy z metody wielomianu aproksymacyjnego:

$$e^{At} = r(A) = aA + b \qquad e^{\lambda t} = a\lambda + b \ \text{ i } \ te^{\lambda t} = a \ \text{ dla } \ \lambda = 2$$

$$e^{2t} = a \cdot 2 + b, \quad te^{2t} = a \implies b = e^{2t} - 2te^{2t}$$

$$r(A) = te^{2t} \cdot A + e^{2t}(1-2t)\mathbb{1} = te^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + e^{2t}(1-2t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} te^{2t} + e^{2t}(1-2t) & te^{2t} \\ -te^{2t} & 3te^{2t} + e^{2t}(1-2t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(1-t) & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}(1+t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(1-t) & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}(1+t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{2t}(1-t) + C_2 t e^{2t} \\ -C_1 t e^{2t} + C_2 e^{2t}(1+t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{2t}\left[t(C_1 - C_2) + C_1 \right]$$

$$y(t) = e^{2t}\left[t(C_2 - C_1) + C_2 \right]$$

ROZWIĄZANIE OGÓLNE, DRUGI SPOSÓB

Szukamy wektorów własnych:

$$\ker(A - 2\cdot I) = \ker\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \ker[-1 \ \ 1] = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Przestrzeń własna jest jednowymiarowa, krotność wartości własnej to 2, zatem A jest niediagonalizowalna. W tej sytuacji wektor własny uzupełniamy do bazy używając wektorów pierwiastkowych. Przestrzeń pierwiastkowa jest to $\ker(A-2I)^2$. Ze względów wymiarowych $\ker(A-2I)^2 = \mathbb{R}^2$. Wektor pierwiastkowy w wybieramy więc niemal dowolnie. Z powodów rachunkowych wygodnie jest wybrać w tak, aby

$(A - 2I)w = v$, jeśli v jest wybranym w. własnym.

Dla nas dobrym wyborem będzie $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$e^{At}v = e^{2t}v$ bo v jest własny. Obliczymy $e^{At}w$.

$\longrightarrow$

$$e^{At}w = e^{At-\lambda t I+\lambda t I} w = e^{At-\lambda t I} e^{\lambda t I} w = e^{\lambda t} e^{t(A-\lambda I)} w$$

$$= e^{\lambda t}\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n (A-\lambda I)^n \cdot \frac{1}{n!}\right] w = e^{\lambda t}\left(I + t(A-\lambda I) + \frac{1}{2}(A-\lambda I)^2 t^2 + \dots\right) w =$$

$$= e^{\lambda t}\left[w + t\underbrace{(A-\lambda I)w}_{v} + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{(A-\lambda I)^2 w}_{0} + \underbrace{\dots}_{0}\right) = e^{\lambda t}(w+tv) =$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + e^{2t}\cdot t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} =$$

Oznaczając przez f bazę (v,w) mamy $[e^{At}]_f^f = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$

W bazie kanonicznej

$$e^{At} = [e^{At}]_e^e = \underbrace{[id_{\mathbb{R}^2}]_f^e}_{\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}} [e^{At}]_f^f \underbrace{[id_{\mathbb{R}^2}]_e^f}_{\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}} =$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} e^{2t}\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix}1&t\\1&1+t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}1-t&t\\-t&1+t\end{bmatrix}$$

wynik jak poprzednio.

ZAGADNIENIE POCZĄTKOWE

$x(0)=1$
$y(0)=2$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego możemy znaleźć bez wypisywania e^{At}. Wystarczy wiedzieć jak e^{At} działa na wektory własne v i w.

Obliczyliśmy poprzednio:

$$e^{At}v = e^{2t}v = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad e^{At}w = e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + e^{2t}\cdot t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}t\\t+1\end{bmatrix}$$

Warunki początkowe rozkładamy w bazie (u,w):

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \underset{\substack{\alpha=1\\ \beta=1}}{=} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = v+w$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = e^{At}(v+w) = e^{At}v + e^{At}w = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}t\\1+t\end{bmatrix} =$$

$$e^{2t}\begin{bmatrix}1+t\\2+t\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x(t) &= e^{2t}(1+t)\\ y(t) &= e^{2t}(2+t)\end{aligned}$$

RÓWNANIE NIEJEDNORODNE $b(t)=\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}$

Uzmiennianie stałych

Podstawiamy

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{bmatrix} = Ae^{At}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix} + e^{At}\begin{bmatrix}\dot{C}_1\\\dot{C}_2\end{bmatrix}$$

$$\cancel{Ae^{At}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}} + e^{At}\begin{bmatrix}\dot{C}_1\\\dot{C}_2\end{bmatrix} = \cancel{Ae^{At}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}} + b(t)$$

$$e^{At}\begin{bmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{bmatrix} = b(t) \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{bmatrix} = e^{-At} b(t)$$

W naszym przypadku

$$\begin{bmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix}1+t & -t\\ t & 1-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix}t+t^2-t^2\\ t^2+1-t\end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix}t\\ t^2-t+1\end{bmatrix}$$

$$\dot{c}_1 = e^{-2t}\cdot t \rightarrow c_1(t) = \int e^{-2t}\, t\, dt = \left\{\begin{matrix} f(t)=t & g'(t)=e^{-2t}\\ f'(t)=1 & g(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{matrix}\right\} = -\frac{t}{2}e^{-2t} +$$

$$\int \frac{1}{2} e^{-2t} dt = -\frac{te^{-2t}}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right) = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$\dot{c}_2 = e^{-2t}(t^2-t+1) \quad c_2(t) = \int e^{-2t}(t^2-t+1)\,dt = \left\{\begin{matrix} f(t)=t^2-t+1 & g'(t)=e^{-2t}\\ f'(t)=2t-1 & g(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{matrix}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2t}(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int e^{-2t}(2t-1)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2t}(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\left(-t-\frac{1}{2}\right)e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} =$$

$$e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= e^{-2t}\left[t^2\left(-\frac{1}{2}\right) + t\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$e^{-2t}\left(-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$e^{-2t}(t^2+1-t)$$

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right) + A$$

$$c_2(t) = -e^{-2t}\frac{1}{2}(t^2+1)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}\left\{ \begin{bmatrix} t+\frac{1}{2} \\ t^2+1 \end{bmatrix} e^{-2t}\left(-\frac{1}{2}\right) + \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right\}$$

RSRN

odtwarza się ROR

Liczymy RSRN

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t+\frac{1}{2} \\ t^2+1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} (1-t)(t+\frac{1}{2}) + t(t^2+1) \\ -t(t+\frac{1}{2}) + (1+t)(t^2+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} t+\frac{1}{2}-t^2-\frac{1}{2}t+t^3+t \\ -t^2-\frac{1}{2}t+t^2+t^3+1+t \end{bmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} t^3-t^2+2t \\ t^3+\frac{1}{2}t+1 \end{bmatrix}$$