RÓWNANIA LINIOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW

(jednorodne i nie, o stałych współczynnikach)

RÓWNANIA JEDNORODNE:

$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0 \;\to\; \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \quad x(t) = Ae^{t} + Be^{2t}$

$\ddot{x} - 2\dot{x} + y = 0 \;\to\; \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (\lambda-1)^2 = 0 \quad x(t) = Ae^{t} + Bte^{t}$

$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0 \;\to\; \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad (\lambda-1-i)(\lambda-1+i) = 0 \quad x(t) = Ae^{t}\cos t + Be^{t}\sin t$

$\uparrow$

i już wszyscy wiedzą jak to działa... Przetestować można na

$x^{(5)} - 5x^{(4)} + 12x^{(3)} - 16x^{(2)} + 12\dot{x} - 4x = 0$

$\lambda^5 - 5\lambda^4 + 12\lambda^3 - 16\lambda^2 + 12\lambda - 4 = 0$

sprawdzamy $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$+1: \; 1 - 5 + 12 - 16 + 12 - 4 = 0$

	1	-5	12	-16	+12	-4
1	1	-4	8	-8	4	=

$(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0$

$\uparrow 2$

$(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)^2$

$Ae^{t} + Bte^{t}\sin t + Cte^{t}\cos t + De^{t}\sin t + Ee^{t}\cos t = x(t)$

RÓWNANIA NIEJEDNORODNE

Najlepiej jest, jeśli RSRN da się zgadnąć. Oto przydatna tabelka:

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

NIEJEDNORODNOŚĆ

WARTOŚCI WŁASNE

POSTAĆ ROZWIĄZANIA

Для подбора частного решения неоднородного уравнения по виду правой части $f(x)$ и корней характеристического уравнения удобно пользоваться следующей таблицей:

Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$f(x) = P_m(x)$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m	а) Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ — многочлен степени не выше m
	б) Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности l	$x^l Q_m(x)$
$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, α — вещественное число	а) Число α не является корнем характеристического уравнения	$Q_m(x) e^{\alpha x}$
	б) Число α является корнем характеристического уравнения кратности l	$x^l Q_m(x) e^{\alpha x}$
$f(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$, где $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени не выше m и хоть один из них имеет степень m	а) Число βi не является корнем характеристического уравнения	$u_m(x) \cos \beta x + v_m(x) \sin \beta x$, где $u_m(x)$ и $v_m(x)$ — многочлены степени не выше m
	б) Число βi является корнем характеристического уравнения кратности l	$x^l [u_m(x) \cos \beta x + v_m(x) \sin \beta x]$
$f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$	а) Число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} [u_m(x) \cos \beta x + v_m(x) \sin \beta x]$
	б) Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности l	$x^l e^{\alpha x} [u_m(x) \cos \beta x + v_m(x) \sin \beta x]$

I. *Правая часть неоднородного линейного дифференциального уравнения — многочлен.*

Пример 1. Решить дифференци...

Metodą przewidywania rozwiązania rozwiązać równanie:

$$\ddot{x} - x = 2t\cos t + e^t$$

Metodą uzmienniania stałych rozwiązać równanie:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{1}{t}e^t$$

Uwaga! Uzmiennianie stałych działa jedynie dla równań pierwszego rzędu!

$$\ddot{x} - 2x + x = \frac{1}{t}e^t \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ 2v(t) - x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 1 = -2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$$x(t) = Ae^t + Bte^t \qquad \dot{x} = Ae^t - B(e^t + te^t) + \dot{A}e^t + \dot{B}te^t$$

$$v(t) = Ae^t + B(e^t + te^t) \qquad \dot{v} = Ae^t - B(2e^t + te^t) + \dot{A}e^t + \dot{B}(e^t + te^t)$$

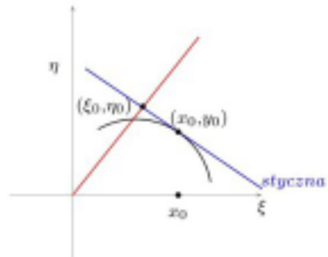
te stałe uzmienniamy

$$\begin{bmatrix} Ae^t - B(e^t + te^t) + \dot{A}e^t + \dot{B}te^t \\ Ae^t - B(2e^t + te^t) + \dot{A}e^t + \dot{B}(e^t + te^t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ae^t + Bte^t \\ Ae^t + B(e^t + te^t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{bmatrix}$$ dalej wiadomo...

Przykład 6. Rozwiążmy następujące zadanie (z treścią): Znaleźć równanie różniczkowe na funkcję, której wykres leży w obszarze $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ i ma następującą własność: odstęp stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(x, y(x))$ od punktu $(0, 0)$ jest równy x. Zróbmy rysunek pomocniczy:

Zaległe zadanie z treścią prowa- dzące do równania jednorodnego!



Jeśli szukana funkcja to $\xi \mapsto y(\xi)$, to równanie stycznej w punkcie $(x_0, y_0 = y(x_0))$ ma postać

$$\eta = y'(x_0)\xi + b. \tag{6}$$

Parametr b musimy dobrać tak, aby punkt (x_0, y_0) spełniał (6). Okazuje się, że

$$b = y_0 - y'(x_0)x_0.$$

Równanie prostej przechodzącej przez $(0, 0)$ i prostopadłej do stycznej to

$$\eta = -\frac{1}{y'(x_0)}\xi. \tag{7}$$

Punkt (ξ_0, η_0) wspólny stycznej i prostopadłej wyznaczymy traktując (6), (7) jako układ równań:

$$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{y'(x_0)\left(y'(x_0)x_0 - y_0\right)}{1 + [y'(x_0)]^2} \\ \eta_0 = -\dfrac{(y'(x_0)x_0 - y_0)}{1 + [y'(x_0)]^2}. \end{cases}$$

Z treści zadania wynika, że odległość (ξ_0, η_0) od $(0, 0)$ ma być równa x_0. Zapisujemy warunek (na kwadrat odległości):

$$\left(\frac{y'(x_0)\left(y'(x_0)x_0 - y_0\right)}{1 + [y'(x_0)]^2}\right)^2 + \left(\frac{(y'(x_0)x_0 - y_0)}{1 + [y'(x_0)]^2}\right)^2 = x_0^2$$

Rachujemy:

$$\left(y'(x_0)\left(y'(x_0)x_0 - y_0\right)\right)^2 + \left((y'(x_0)x_0 - y_0)\right)^2 = x_0^2\left(1 + [y'(x_0)]^2\right)^2$$

$$\left((y'(x_0)x_0 - y_0)\right)^2\left(1 + [y'(x_0)]^2\right)^2 = x_0^2\left(1 + [y'(x_0)]^2\right)^2$$

Dzielimy obie strony przez (dodatnie) wyrażenie $(1 + [y'(x_0)]^2)$:

$$\left(y'(x_0)x_0 - y_0\right)^2 = x_0^2\left(1 + [y'(x_0)]^2\right)$$

$$[y'(x_0)]^2x_0^2 - 2y'(x_0)x_0y_0 + y_0^2 = x_0^2 + [y'(x_0)]^2x_0^2$$

$$-2y'(x_0)x_0y_0 + y_0^2 = x_0^2$$

Sprowadzamy równanie do postaci kanonicznej:

$$y'(x_0) = \frac{y_0^2 - x_0^2}{2x_0y_0}.$$

Warunek o którym mowa w treści zadania zachodzić ma w każdym punkcie krzywej. Opuszczamy więc indeksy wskazujące na konkretny punkt. Rachunki doprowadziły nas do równania

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$