Metodą różniczkowania po parametrze obliczyć dane całki. Uzasadnić swoje rachunki.

$$F(a)=\int_0^{\pi/2}\log\left(a^2-\sin^2x\right)dx$$

Najpierw robimy rachunki, nad ich sensownością pomyślimy później.

$$f(a,x)=\log\left(a^2-\sin^2x\right)\qquad \frac{\partial f}{\partial a}=\frac{1}{a^2-\sin^2x}\cdot 2a$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{2a\,dx}{a^2-\sin^2x}=\left\{\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x \\ dt=\frac{1}{\cos^2x}dx \\ \frac{dt}{(1+t^2)}=dx \end{array}\quad \sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2}\right\}=2a\int_0^{\infty}\frac{dt/1+t^2}{a^2-\ t^2/1+t^2}=$$

$$2a\int_0^{\infty}\frac{dt}{a^2(1+t^2)-t^2}=2a\int_0^{\infty}\frac{dt}{a^2+(a^2-1)t^2}=2a\int_0^{\infty}\frac{1}{a^2}\,\frac{dt}{1+\frac{a^2-1}{a^2}t^2}=$$

$$=2\cancel{a}\frac{1}{\cancel{a^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}t\right)\frac{\cancel{a}}{\sqrt{a^2-1}}\Bigg|_0^{\infty}=2\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(\pi/2\right)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$F'(a)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\qquad F(a)=\pi\operatorname{arcosh}(a)+c$$

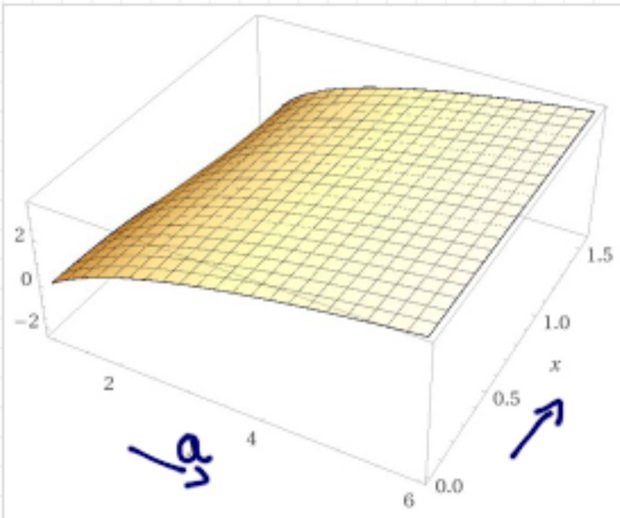
trzeba znaleźć

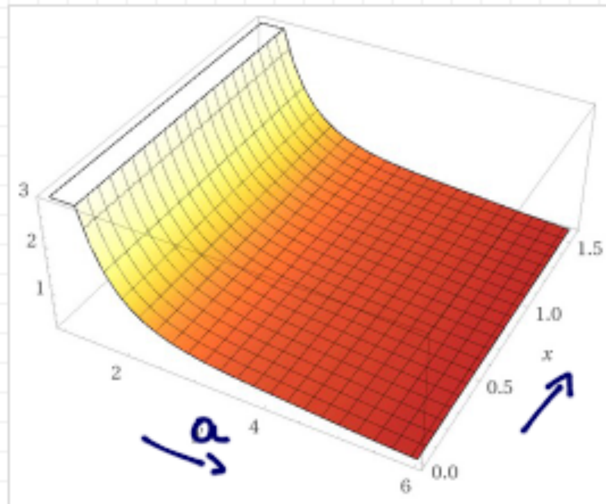
Zastanówmy się teraz nad sensownością rachunków. $f(x,a)$ określona jest na $I\times J$ gdzie $I=[0,\pi/2]$ $J=]1,+\infty[$ Istotnie dla dowolnego $a\in J$ $f(0,a)=\log a^2$, $f(\pi/2,a)=\log(a^2-1)$ granice na brzegach są skończone $F:J\to\mathbb{R}$ jest ciągła.

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{2a}{a^2-\sin^2x}\quad \frac{\partial f}{\partial a}(0,a)=\frac{2}{a},\ \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\pi}{2},a\right)=\frac{2a}{a^2-1}$$, podobnie zatem

(„zwarta" całka z parametrem) można różniczkować pod znakiem całki.

$f(a,x)$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)$





Trudność stanowi obliczenie stałej C. Gdyby F była ciągła nie tylko na $]1,\infty[$ ale na $[1,\infty[$ można by wyznaczyć $F(1)$ i ustalić w ten sposób C. Do tego potrzeba aby $F(a)$ była zbieżna jednostajnie dla $[1, a_0]$.

$$\underset{\log(1-\sin^2 x) = \log\cos^2 x}{\underset{\parallel}{f(x,1)}} \le f(x,a) \le f(x,\underset{a_0}{\underset{\uparrow}{4}}) = \log(4-\sin^2 x)$$

$$|f(x,a)| \le \max\{-\log\cos^2 x, \log(4-\sin^2 x)\} \le \underbrace{\log(4-\sin^2 x) - \log\cos^2 x}_{\text{całkowalne?}}$$

to tak $\qquad$ to sprawdzimy

$$\int_0^{\pi/2} \log\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \log(\sin^2 x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) =$$

$$= \int_0^{\pi} \log\sin x\,dx = \int_0^{\pi} \log 2 + \log\sin\frac{x}{2} + \log\cos\frac{x}{2} = \pi\log 2 + \int_0^{\pi/2} 2\log\sin t\,dt +$$

$$2\int_0^{\pi/2} \log\cos t\,dt = \pi\log 2 + 2\int_0^{\pi/2} \log\sin^2 x$$

$$I = \log 2\cdot\pi + 2I \qquad I = -\pi\log 2$$

$F(1) = I = -\pi \log 2 = \pi \operatorname{arch}(\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{a}) + C \Rightarrow C = -\pi \log 2$

$F(a) = \pi \left(\operatorname{arch}(a) - \log 2 \right.$

Różniczkując po parametrze obliczyć $F(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(ax)\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ $a \in \mathbb{R}$

$f(x,a) = \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\cancel{x}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}\,\cancel{x}} = \frac{1}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x,a) = a \quad \lim_{x\to 1^-} f(x,a) = \infty \longrightarrow$ niewłaściwa całka z parametrem

Szukamy całkowalnej majoranty dla $\frac{\partial f}{\partial a}$

$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

całkowalne $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ $\quad F(a) = \frac{\pi}{2} \operatorname{arsh} a + C$

$C = 0$ bo $F(0) = 0$

$\int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$

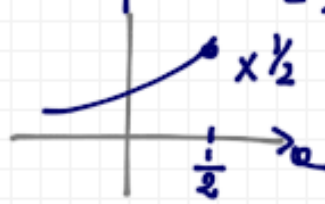
$t = \sin x \dots$

Obliczyć granicę $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^{\infty}\frac{x^a}{1+x^2}\,dx$

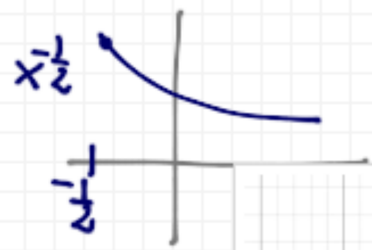
Jeśli można zamienić kolejność przechodzenia do granicy i całkowania to $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^{\infty}\frac{x^a}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

Czy można? Całka jest niewłaściwa, szukamy całkowalnej majoranty.
Wystarczy dla a w otoczeniu 0 np $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Dla $x > 1$ $\quad x^a = e^{a\log x}$



dla $x < 1$ $\quad x^a = e^{a\log x}$



$$\left|\frac{x^a}{1+x^2}\right| \leq g(x) = \begin{cases} \frac{x^{1/2}}{1+x^2} & x \geq 1 \\ \frac{x^{-1/2}}{1+x^2} & 0 < x < 1 \end{cases}$$