Analiza 1R, ćwiczenia 1 i 2

Zadanie 1 Wyrazić przez teoriomonogościowe ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, dopełnienie zbioru) operacje na zbiorach A, B, C zawartych w X następujące zbiory

$$S := \{x \in X |\ x \in A \Rightarrow x \in B\},$$

$$P := \{x \in X |\ x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$$

$$R := \{x \in X |\ x \in A \Rightarrow (x \in B \Leftrightarrow x \in C)\}.$$

Zadanie 2 Wyznaczyć i narysować zbiory

$$P = \bigcup_{t\in[0,1]} A_t, \quad Q = \bigcap_{t\in[0,1]} A_t \qquad \text{dla} \quad A_t = [t, 2t+1] \times [-t, t+1]$$

Zadanie 3 Dla dowolnego ciągu zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiujemy

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant n} A_k, \qquad \limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k.$$

Wykazać, że

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Przekonać się o tym dla ciągu

$$A_n = \left[\frac{(-1)^n n}{1+n},\ \frac{4n-15}{2n-7}\right].$$

Zadanie 4 Znaleźć najmniejszą relację równoważności w $\{a, b, c, d\}$ zawierającą (a, c) oraz (a, d).

Zadanie 5 Na wykładzie było: W $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wprowadzamy relację

$$(n, m) \sim (m', n') \iff m + n' = m' + n.$$

W przestrzeni $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim$ klas abstrakcji można wprowadzić działania dodawania i mnożenia tak, aby zbiór ten był izomorficzny z $\mathbb{Z}$. Podobnie skonstruować można $\mathbb{Q}$, wprowadzając stosowną relację w $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Zdefiniować tę relację, sprawdzić, że jest to relacja równoważności, wprowadzić działania dodawania i mnożenia w zbirze klas równoważności.

Zadanie 6 W zbiorze $\mathbb{Q}$ definiujemy relację

$$R = \{(x, y) : \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad 10^n(x - y) \in \mathbb{Z}\}.$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Opisać klasy równoważności.

Zadanie 7 Korzystając z zasady indukcji udowodnić następujące wzory

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \varepsilon_1\sqrt{2 + \varepsilon_2\sqrt{2 + \cdots \varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\left[\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{2^{n-1}}\right]\right),\ \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$