Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 2

Zadanie 1. Elementami $SL(2,\mathbb{R})$ są macierze 2×2 o współczynnikach rzeczywistych i wyznaczniku równym 1. W naturalny sposób $SL(2,\mathbb{R})$ jest podzbiorem w $\mathbb{R}^4$. **(1)** Pokazać, że podzbiór ten jest powierzchnią. **(2)** Znaleźć przestrzeń styczną w punkcie $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **(3)** Czy $SL(2,\mathbb{R})$ jest powierzchnią spójną? Na to pytanie łatwiej odpowiedzieć gdy znajdzie się odpowiednią parametryzację powierzchni. **(4)** Sprawdzić, że jeśli $g \in SL(2,\mathbb{R})$ a X jest elementem przestrzeni stycznej w $\mathbf{1}$ to także gXg^{-1} (mnożenie w sensie mnożenia macierzy) także jest elementem przestrzeni stycznej. Niech teraz $t \mapsto g(t)$ będzie krzywą reprezentującą wektor Y styczny w $\mathbf{1}$. Obliczyć wektor styczny do krzywej $t \mapsto g(t)Xg^{-1}(t)$ w $t=0$ i zinterpretować go jako element przestrzeni stycznej do $SL(2,\mathbb{R})$ w $\mathbf{1}$. Co wyszło?

Zadanie 2. Niech S oznacza podzbiór $\mathbb{R}^3$ dany równaniem

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$$

dla $a > b > 0$. **(1)** Pokazać, że S jest powierzchnią. **(2)** Znaleźć wygodną parametryzację S oraz bazę przestrzeni stycznej związaną z tą parametryzacją. **(3)** Zapisać macierz iloczynu skalarnego na przestrzeni stycznej do S w dowolnym punkcie indukowanego z $\mathbb{R}^3$. **(4)** Dla $a=2$ i $b=\sqrt{2}$ znaleźć równanie płaszczyzny (podprzestrzeni afinicznej) w $\mathbb{R}^3$ stycznej do S w punkcie $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1)$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że odwzorowanie

$$]-1,1[\times\mathbb{R} \ni (u,\varphi) \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\varphi(1+u\cos\frac{\varphi}{2}) \\ \sin\varphi(1+u\cos\frac{\varphi}{2}) \\ u\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

jest parametryzacją powierzchni w $\mathbb{R}^3$. Co to za powierzchnia? (Wskazówka: sprawdzić obraz parametryzacji przy ustalonym φ.) Znaleźć równanie tej powierzchni. Znaleźć bazę wektorów stycznych związanych z parametryzacją. Porównać bazy otrzymane w punktach odpowadających $(0,\varphi)$ i $(0,\varphi+2\pi)$.

Zadanie 4. *(Domowe)* Niech $I_u \subset \mathbb{R}^3$ będzie odcinkiem o końcach $(0,0,u) \pm (\cos u, \sin u, 1)$ (bez końców, tzn koce odcinka nie należą do I_u). Udowodnić, że

$$S = \bigcup_{u\in\mathbb{R}} I_u$$

jest powierzchnią w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć jej parametryzację. Opisać przestrzeń styczną w punkcie $(0,0,0)$.