Analiza 1R, ćwiczenia 3 i 4

Ważne nierówności

Zadanie 1 Udowodnić nierówność Bernoulliego

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geqslant -1 \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Zadanie 2 Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła jeśli $\forall a, b \in I, \forall 0 \leqslant q \leqslant 1 f(qa + (1-q)b) \leqslant qf(a) + (1-q)f(b)$. Udowodnić (nierówność Jensena), że dla unkcji wypuklej zachodzi

$$\forall q_1, \ldots,\ q_n \geqslant 0,\ q_1 = \cdots + q_n = 1, a_1, \ldots, a_n \in I \quad f(q_1 a_1 + \cdots + q_n a_n) \leqslant q_1 f 9 a_1) + \cdots a_n f(q_n)$$

Zadanie 3 Dla $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ definiujemy

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$
$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$
$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Udowodnić nierówności

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant H(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Trochę kombinatoryki

Zadanie 4 Symbol Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Wykazać wzór $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$
2. Co wstawić w miejsce (*) $(a+b+c)^n = \sum (*) a^m b^l c^{n-l-n}$
3. Obliczyć $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} =?$
4. Znaleźć współczynnik przy x^8 w rozwinięciu $(1 - x^2 + x^3)^9$.

Injekcja, surjekcja, bijekcja

Zadanie 5 Podać przykład bijekcji między zbiorami X i Y jeśli

$$X = [0,1[, \quad Y = [0,1]$$
$$X =]0,1[, \quad Y = [-2,2[\setminus \{-1,1\}$$
$$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad Y = \mathbb{N}$$

Zadanie 6 *(ćwiczenie na formułowanie dowodów)* Odwzorowanie $f : X \to X$ spełnia warunek

$$\forall x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) = x.$$

Udowodnić, że odwzorowanie f jest bijekcją. Symbol f^n oznacza tu $n-$krotne złożenie odwzorowania f ze sobą, tzn $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\times n}$

Zadanie 7 Ilustracja do twierdzenia Cantora-Bernsteina-Schroedera: Niech

$$X = Y = \{(x_n)_{n=0}^{\infty}, \quad x_i \in \{0,1\}\}.$$

Niech także

$$\varphi : X \to Y, \quad \phi(x_n) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Przyjmując $\psi = \varphi$ skonstruować bijekcję jak w dowodzie twierdzenia CBS.