Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 4

Zadanie 1. Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ będzie sferą jednostkową, a $\mathcal{O}$ zbiorem $\mathcal{O} = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. Niech F oznacza odwzorowanie $F : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ przyporządkowujące punktowi p na sferze jednostkowej $S^2 \subset \mathbb{R}^2$ punkt na płaszczyźnie $\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{R}^2 = \{(x,y,z) : \ \ z = 0\}$ będący rzutem stereograficznym p względem bieguna $(0,0,1)$. **(a)** Zapisać odzworowanie F we współrzędnych (φ, ϑ) na sferze pochodzących od współrzędnych sferycznych w $\mathbb{R}^3$ i naturalnych współrzędnych (x,y) w $\mathbb{R}^2$. **(b)** Znaleźć obrazy wektorów $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ względem odwzorowania stycznego do F w ustalonym punkcie. **(c)** Zapisać macierz odwzorowania stycznego do F we współrzędnych jak w punkcie (a).

Zadanie 2. Sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{C} \setminus R_{-} \ni \rho e^{i\varphi} \longmapsto \frac{\rho}{a} \begin{bmatrix} \cos(a\varphi) \\ \sin(a\varphi) \\ \sqrt{a^2 - 1} \end{bmatrix}$$

dla $a > 0$, $\varphi \in]-\pi, \pi[$ jest izometrią, tzn. odwzorowanie styczne zachowuje długość wektorów stycznych względem naturalnych iloczynów skalarnych w $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 3. Trajektoria cząstki poruszającej się na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest krzywą γ zapisaną we współrzędnych biegunowych zależnością od czasu współrzędnych r i φ:

$$\gamma(t) = (r(t), \varphi(t)).$$

Znaleźć współrzędne wektora prędkości w ustalonym punkcie krzywej względem bazy w przestrzeni stycznej związanej z biegunowym układem współrzędnych. Korzystając ze struktury przestrzeni afinicznej na $\mathbb{R}^2$ i możliwości porównywania prędkości w różnych punktach zapisać w tej samej bazie współrzędne wektora przyspieszenia.