Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 5

Zadanie 1. Niech $(\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{2n})$ będzie liniowo niezależnym układem kowektorów. Oznaczmy

$$\omega_k = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^3 \wedge \epsilon^4 + \dots + \epsilon^{2k-1} \wedge \epsilon^{2k}.$$

Obliczyć

$$(\omega_k)^{\wedge k} = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k} \quad \text{dla} \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Zadanie 2. Pokazać, że dla każdego dwukowektora α istnieje baza kanoniczna, tzn taka w której ma on postać

$$\alpha = \varphi^1 \wedge \varphi^2 + \varphi^3 \wedge \varphi^4 + \dots + \varphi^{2k-1} \wedge \varphi^{2k}.$$

dla pewnego k. Skonstruować taką bazę dla $\alpha = f^1 \wedge f^2 + f^2 \wedge f^3 + f^4 \wedge f^4 + f^4 \wedge f^1$, jeśli (f^1, f^2, f^3, f^4) stanowią bazę w czterowymiarowej przestrzeni V^*.

Zadanie 3. Niech $\omega \in \bigwedge^2 V^*$. Pokazać, że dwukowektor ω jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega \wedge \omega = 0$.

Zadanie 4. Wyrazić we współrzędnych sferycznych i cylindrycznych następujące formy różniczkowe na $\mathbb{R}^3$:

$$\sigma_1 = x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\rho}\left(xz\mathsf{d}x + yz\mathsf{d}y - \rho^2\mathsf{d}z\right),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{r^3}\left(x\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + z\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y\right),$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{z}\left(x\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x - z\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y\right),$$

gdzie $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.