Analiza 1R, ćwiczenia 5 i 6

Zadanie 1 Zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granicę następujących ciągów:

(1) $x_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{2n^2-3n+1}$

(2) $x_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+3} - \sqrt{n^2+2n+3}$

(3) $x_n = \dfrac{2n3^n}{n!}$

(4) $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$

(5) $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$

(6) $x_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$

(7) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

(8) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

(9) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1} + \dfrac{3}{\sqrt[n]{8}-1}$

(10) $x_n = \dfrac{n3^n+2n^2-1}{n!+1}$

(11) $x_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a \in \mathbb{R}$

(12) $x_n = \cos\left(\dfrac{n^2\pi}{n+2}\right)$

Zadanie 2 Wykazać, że ciąg

$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

jest zbieżny dla dowolnego rzeczywistego x. Dla $e(x) = \lim_{n\to\infty} e_n(x)$ wykazać następujące własności:

(1) $e(x)e(y) = e(x+y)$,

(2) dla dowolnego x $e(x) \geqslant 0$, $e(x) \geqslant 1+x$,

(3) dla $x<1$, $e(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

(4) Zauważyć, że dla funkcji odwrotnej log prawdziwe są oszacowania $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \log(x) \leqslant x-1$.

(5) Wykazać, że $e(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

Zadanie 3 Wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = g$ to granica ciągu

$$(1+a_n)^{b_n}$$

istnieje i jest równa $e(g)$. Wykorzystać to do zbadania granicy ciągów:

$$x_n \left(\frac{3n+7}{3n+5}\right)^{2n+3}, \qquad y_n = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

Zadanie 4 Jeszcze więcej ciągów (zbadać istnienie granicy)

(1) $x_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4^2} + \dfrac{4}{4^2} + \cdots + \dfrac{n}{4^{n-1}}$

(2) $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$

(3) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$

(4) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$