Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 6

Zadanie 1. Sprawdzić, że dana forma α określona na $\mathcal{O}$ jest zamknięta oraz znaleźć funkcję f taką, że $f = \mathsf{d}\alpha$:

(a) $\mathcal{O} = \{(x, y, z) :\ y > 0, z > 0\}$, $\alpha = (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z})\mathsf{d}x + (\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2})\mathsf{d}y - \frac{xy}{z^2}\mathsf{d}z$,

(b) $\mathcal{O} = \{(x, y) :\ x > 0\}$, $\alpha = \dfrac{x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x}{x^2 + xy + y^2}$

(c) $\mathcal{O} = \{(x, y) :\ x + y > 0\}$, α jak w (b).

Zadanie 2. Niech $\mathcal{O} := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 > 0 \ \text{ lub } \ z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ (dopełnienie półprostej $\{x = y = 0, z \leqslant 0\}$.

(a) Obliczyć $\phi^*\omega$, jeśli $\omega = \frac{1}{r^3}(x\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + y\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y)$ jest formą na $\mathcal{O}$, $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ oraz $\phi(u, v, w) := (uw, vw, \frac{-u^2-v^2+w^2}{2})$.

(b) Sprawdzić, że ϕ jest dyfeomorfizmem $\mathcal{U} := \{(u, v, w) : w > 0\}$ na $\mathcal{O}$;

(c) Znaleźć formę σ określoną na $\mathcal{U}$, taką że $\mathsf{d}\sigma = \phi^*\omega$, a następnie π określoną na $\mathcal{O}$, taką że $\phi^*\pi = \sigma$; sprawdzić, że $\mathsf{d}\sigma = \omega$, a więc forma ω jest zupełna na $\mathcal{O}$.