



## Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 7

**Zadanie 1.** Niech  $\omega$  będzie formą określoną na  $\mathcal{O} = \{(x, y, z) : z > 0\}$  wzorem

$$\omega = \frac{1}{z^3}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy).$$

Oznaczmy przez  $F$  odwzorowanie

$$F : [0, 1] \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}, \quad F(t, x, y, z) = (tx, ty, 1 - t + tz).$$

Sprawdzić, że forma

$$\theta = \int_0^1 F^* \omega \left( \frac{\partial}{\partial t}, \cdot \right)$$

spełnia  $d\theta = \omega$ . Symbol całkowania w powyższym wzorze oznacza, że współczynniki formy  $F^* \omega \left( \frac{\partial}{\partial t}, \cdot \right)$  (które są zależne między innymi od  $t$ ) całkujemy względem  $t$  na odcinku  $[0, 1]$ . Przeprowadzić podobny rachunek dla

$$G(t, x, y, z) = (tx, ty, z^t).$$

**Zadanie 2.** Sprawdzić wzór na różniczkę wyrażoną za pomocą komutatora pól wektorowych w przypadku różniczki jednoformy.

**Zadanie 3.** Wyznaczyć krzywe całkowe pól wektorowych na  $\mathbb{R}^2$

$$(1) X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(2) Y = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(3) Z = \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Czy są to pola zupełne?

**Zadanie 4.** Niech

$$X = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left( zx \frac{\partial}{\partial x} + zy \frac{\partial}{\partial y} - (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Będzie polem wektorowym na  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Sprawdzić, że  $X$  jest styczne do jednostkowej sfery dwuwymiarowej  $S^2$ . Wyznaczyć krzywe całkowe pola  $X$  na sferze.