Analiza 1R, ćwiczenia 7 i 8

Zadanie 1 Jeszcze parę ciągów (zbadać zbieżność, jeśli się da podać granicę)

(1) $x_n = \sqrt[n]{(1+x)^n + (1-x)^n},\ x \in \mathbb{R}$ (2) $x_n = \frac{n}{1+E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n})$

(3) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n},\ x_1 > 0$ (4) $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n},\ x_1 > 1$

Zadanie 2 Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a \qquad \lim_{n\to\infty} [n(\sqrt[n]{n} - 1) - \log n] = 0$$

i użyć tego do obliczenia granic

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5}-1}{\sqrt[n]{3}-1}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{\log n}{n} \right)^n.$$

Zadanie 3 Wykazać następujące trzy fakty o ciągach

1. (kolejne Twierdzenie Cauchy'ego) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$ jeśli granica po prawej stronie istnieje.

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ jeśli granica po prawej stronie istnieje. Zbadać przypadek ciągu $x_{2k+1} = x_{2k} = 2^k$;

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n$ jeśli granica po prawej stronie istnieje.

Zadanie 4 Użyć faktów z poprzedniego zadania do badania ciągów

$$x_n = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}, \quad y_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad z_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}.$$

Zadanie 5 Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (x_n) jest ograniczony oraz spełnia warunek

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$$

to zbiór punktów skupienia tego ciągu jest odcinkiem domkniętym $[a, b]$, $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$.

Zadanie 6 Odcinkiem metrycznym $[a, b]$ nazywać będziemy podzbiór przestrzeni metrycznej X $[a, b] = \{x \in X : \ d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$. Wykazać, że odcinek metryczny jest domknięty. Jak wyglądają odcinki metryczne w $\mathbb{R}^2$ względem metryk d_1, d_2, d_∞?

Zadanie 7 Wykazać, że zbiór punktów skupienia ciągu w przestrzeni metrycznej jest domknięty.