Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 8

Niech ω oznacza kanoniczną formę objętości na $\mathbb{R}^n$, tzn

$$\omega = \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n.$$

Dywergencję pola wektorowego

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

definiujemy wzorem

$$(\operatorname{div} X)\omega = \imath_X \omega.$$

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią wektorową wyposażoną w kanoniczny iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)$. Przestrzeń styczna do $\mathbb{R}^n$ w dowolnym punkcie jest izomorficzna z $\mathbb{R}^n$ i co za tym idzie także wyposażona w iloczyn skalarny. Każdy iloczyn skalarny zadaje izomorfizm G przestrzeni wektorowej z przestrzenią dualną

$$v \longmapsto G(v) = (v|\cdot).$$

Korzystając z tego izomorfizmu możemy „tłumaczyć” wektory styczne na kowektory styczne i pola wektorowe na jednoformy:

$$G(X) = X^1 \mathsf{d}x^1 + X^2 \mathsf{d}x^2 + \cdots + X^n \mathsf{d}x^n$$

Izomorfizmu G używamy do definicji gradientu funkcji:

$$(\operatorname{grad} f)(x) = G^{-1}(\mathsf{d}f(x)).$$

Wielkość $\triangle f$ zdefiniowaną wzorem

$$\triangle f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

nazywamy laplasjanem funkcji f. Dla $n = 3$ rotację pola wektorowego X definiujemy wzorem

$$\mathsf{d}G(X) = \imath_{\operatorname{rot} X}\omega.$$

Iloczyn wektorowy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ także można wyrazić za pomocą formy objętości:

$$G(X \times Y) = \omega(X, Y, \cdot).$$

Korzystając z powyższych definicji rozwiązać zadania:

Zadanie 1. Sprawdzić, że $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ oraz $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$.

Zadanie 2. Niech M będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, niech także $r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Definiujemy pole wektorowe na $\mathbb{R}^3$ wzorem

$$F(r) = Mr.$$

Jakie warunki musi spełniać M aby pole to miało **(a)** potencjał wektorowy, **(b)** potencjał skalarny? Znaleźć, jeśli istnieją potencjały, dla

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Niech $R = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ będzie polem wektorowym na $\mathbb{R}^3$. Niech także A będzie dowolnym stałym polem na $\mathbb{R}^3$. Obliczyć

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(A \times R))$$

Zadanie 4. Sprawdzić tożsamość (dla pól wektorowych X, Y na $\mathbb{R}^3$)

$$\operatorname{div}(X \times Y) = (Y|\operatorname{rot} X) - (X|\operatorname{rot} Y)$$