Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 9

Zadanie 1. *Rozgrzewka* Obliczyć całkę z formy $xy\mathsf{d}x + y^2\mathsf{d}y$ po następujących jednowymiarowych podrozmaitościach (z brzegiem) w $\mathbb{R}^2$: (a) część okręgu o promieniu 1 położona w górnej półpłaszczyźnie zorientowana antyzegarowo, (b) odcinek łączący punkty $a = (-2, -1)$ i $b = (1, 2)$ zorientowany od a do b (c) fragment wykresu funkcji $x \mapsto \sin x$ dla $x \in [0, \pi]$ zorientowany zgodnie z kierunkiem wzrastania x.

Zadanie 2. Obliczyć całkę z formy

$$\omega = z(\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y)$$

po fragmencie sfery jednostkowej zawartej w pierwszym oktancie układu współrzędnych. Przyjmujemy orientację zgodną z orientacją "na zewnątrz" według zasad obowiązujących w twierdzeniu Stokes'a. Tę samą całkę można obliczyć korzystając z twierdzenia Stokes'a.

Zadanie 3. Sprawdzić twierdzenie Stokes'a licząc dwoma sposobami całkę z formy

$$\alpha = (yz\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y) \wedge \mathsf{d}z$$

po powierzchni stożka $S = \{(x, y, z) : z^2 + y^2 = (1 - z)^2, 0 \leqslant 1 \leqslant z\}$ z orientacją "na zewnątrz".

Zadanie 4. Obliczyć pole powierzchni, jaką walec $\{(x, y, z) : (x - a)^2 + y^2 = a\}$ wycina w sferze o środku w $(0, 0, 0)$ i promieniu $2a$.

Zadanie 5. Obliczyć strumień pola $A = y\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial y} + x^2\frac{\partial}{\partial z}$ przez powierzchnię $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \in [1, 2]\}$ zorientowaną na zewnątrz.