Analiza 1R, ćwiczenia 9 i 10

Zadanie 1 Dowieść, że:

(a) zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony;

(b) jeśli (x_n) i(y_n) są dwoma ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, d), to ciąg liczbowy $(d(x_n, y_n))$ jest zbieżny.

Zadanie 2 Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz f-obraz każdego zbioru otwartego jest domknięty, to f jest stała.

Zadanie 3 Dowieść, że :

(a) jeśli podzbiory A i B przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są zwarte, to zbiór $A + B := \{a + b \ : \ a \in A \, , \ b \in B\}$ też jest zwarty;

(b) jeśli A jest zwarty, a B domknięty, to $A + B$ jest domknięty. Podać przykład domkniętych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^2$, dla których zbiór $A + B$ nie jest domknięty.

Zadanie 4 Wykazać, że jeżeli X i Y są przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem, to następujące warunki są równoważne:

(a) f jest ciągłe (tzn. przeciwobrazy zbiorów otwartych w Y są otwarte w X);

(b) przeciwobrazy zbiorów domkniętych w Y są domknięte w X;

(c) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego podzbioru $A \subset X$.

Zadanie 5 Niech X będzie przestrzenią zwartą, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem ciągłym. Wykazać, że:

(a) jeśli $A \subset X$ jest domknięty, to $f(A)$ jest domknięty;

(b) jeśli f jest injektywne, to jest homeomorfizmem X na $f(X)$.

Zadanie 6 Odwzorowanie f nazywa się *domknięte* (*otwarte*), jeżeli f-obrazy zbiorów domkniętych (otwartych) są domknięte (otwarte). Zbadać, czy dane ciągłe (w zwykłej topologii $\mathbb{R}$) odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest domknięte lub otwarte:

(a) $f(x) := \sqrt{1 + x^2}$;

(b) $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(c) $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$;

(d) $f(x) := \sin x$.