Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 10

Zadanie 1. Niech φ, ψ będą funkcjami gładkimi na $\mathbb{R}^3$. Udowodnić, że strumień pola będącego iloczynem wektorowym gradientów tych funkcji przez dwuwymiarową powierzchnię z brzegiem S jest równy całce z formy $\varphi \mathsf{d}\psi$ po brzegu ∂S tej powierzchni.

Zadanie 2. Niech R będzie radialnym polem wektorowym na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$
$$R = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$
oraz A jest dodatnio jednorodnym polem wektorowym stopnia α na tym samym obszarze (tzn $A(tx,ty,tz) = t^\alpha A(x,y,z)$, dla $t > 0$) to zachodzą wzory
$$(\alpha+1)A = \mathrm{grad}\,(A|R) + (\mathrm{rot}\,A)\times R, \qquad (\alpha+2)A = \mathrm{rot}\,(A\times R) + (\mathrm{div}\,A)R.$$

Zadanie 3. Dla pola wektorowego
$$H = x^2y\frac{\partial}{\partial x} + y^2z\frac{\partial}{\partial y} + z^2x\frac{\partial}{\partial z}$$
znaleźć takie pola wektorowe F i G, że $H = F + G$ oraz $\mathrm{div}F = 0$ i $\mathrm{rot}G = 0$

Zadanie 4. *Uwaga! Wydaje mi się trudne!* Niech X będzie polem wektorowym na $\mathbb{R}^3$ a Φ_t jego potokiem. Udowodnić, że jeśli $\omega = \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$ to prawdziwy jest wzór
$$\lim_{t\to 0}(\Phi_t^*\omega - \omega) = (\mathrm{div}\,X)\omega.$$

Zadanie 5. Obliczyć długość krzywej Vivianiego, tzn. krzywej będącej przecięciem sfery o środku w $(0,0,0)$ i promieniu $2a$ i walca zadanego równaniem $(x-a)^2 + y^2 = 0$