



Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 11 i 12

Zadanie 1. Niech g będzie kanoniczną metryką na \mathbb{R}^3 a g_S jej obcięciem do sfery jednostkowej. Wyrazić g_S oraz formę objętości stowarzyszoną z tą metryką we współrzędnych stereograficznych.

Zadanie 2. Rozważmy płaszczyznę \mathbb{R}^2 z metryką $ds^2 = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}(dx^2 + dy^2)$. Pokazać, że dwa dowolne punkty \mathbb{R}^2 można połączyć krzywą o długości mniejszej niż 4 (dla ambientnych mniejszej niż 1, 58).

Zadanie 3. Obliczyć pole powierzchni płata paraboloidy hiperbolicznej

$$\{(x, y, z) : z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Zadanie 4. Wyrazić dywergencję pola wektorowego i laplasjan (na funkcjach) we współrzędnych parabolicznych w \mathbb{R}^3 (ξ, η, φ).

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi$$

$$y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

Zadanie 5. Znaleźć pracę pola sił

$$F = xz(6z - 3xy)\frac{\partial}{\partial x} + 2x^2z\frac{\partial}{\partial y} + 3x^2z\frac{\partial}{\partial z}$$

wzdłuż krzywej będącej brzegiem powierzchni $S = \{(x, y, z) : z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$. Orientację proszę wybrać samodzielnie.

Zadanie 6. Obliczyć strumień pola

$$E = x^3\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

przez powierzchnię będącą brzegiem bryły

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 - 2z \leq 0, \quad z^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Zadanie 7. Obliczyć pole powierzchni sfery i objętość kuli o promieniu R w przestrzeni \mathbb{R}^n z metryką euklidesową.