Analiza 1R, ćwiczenia 11 i 12

Trzy fakty funkcjach ciągłych (*zlecenie wykładowcy*)

Zadanie 1 Udowodnić, że dla rzeczywistej funkcji ciągłej f zachodzi równoważność: f jest injekcją wtedy i tylko wtedy gdy f jest ściśle motoniczna.

Zadanie 2 Udowodnić, że dla rzeczywistej funkcji rosnącej f zachodzi równoważność: f jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy dla wszystkich a, b $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Zadanie 3 Udowodnić, że jeśli f jest rzeczywistą funkcją ściśle rosnącą i ciągłą to f jest bijekcją i funkcja odwrotna jest ciągła i ściśle rosnąca.

Klasyczne ODZS-y

Zadanie 4 W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ zbadać ODZS zbioru

$$A_p = \{t \in \mathbb{R} : \quad 2t^2 - 3t \leqslant pe^t\}.$$

Zadanie 5 Niech X będzie przestrzenią ograniczonych ciągów liczbowych metryką

$$d((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbadać ODZS zbioru ciągów zbieżnych do 0.

Jeszcze trochę topologii

Zadanie 6 Mówimy, ze podzbiory A_1, A_2 są rozgraniczone jeśli $\bar{A}_1 \cap A_2 = A_1 \bar{A}_2 = \emptyset$. Wykazać, że jeśli S_1 i S_2 są zbiorami spójnymi i nie są rozgraniczone, to $S_1 \cup S_2$ też jest zbiorem spójnym. Wykazać następnie, że wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

jest zbiorem spójnym. Czy jest on łukowo spójny?

Zadanie 7 Niech (X, d), (Y, ρ) będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \to Y$ odwzorowaniem, a $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \quad y = f(x)\}$ jego wykresem. Wykazać, że jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym to $\mathrm{Graph}(f)$ jest zbiorem domkniętym. Znaleźć kontrprzykład pokazujący, że twierdzenie odwrotnie nie jest prawdziwe. Wykazać także, że przy dodatkowym założeniu, że Y jest zwarta, twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

W końcu rachunek różniczkowy

Zadanie 8 Udowodnić, że funkcja $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ określona na $]-1, 0[\cup]0, \infty[$ da się przedłużyć do funkcji różniczkowalnej na $]-1, \infty[$. Obliczyć $f(0)$, $f'(0)$. Wykazać, że f jest malejąca, a $x \mapsto (1 + x)f(x)$ rosnąca. Wskazówka: przydatne oszacowania

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x, \qquad 1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x} \;\text{ dla }\; x < 1.$$

Zadanie 9 Badając własności funkcji $x \mapsto e^{-x}x^e$ stwierdzić, która z liczb e^{π} czy π^e jest większa.