Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 13

Zadanie 1. Niech $c : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wyprowadzić następujące wzory na krzywiznę i srkęcenie (drugą krzywiznę)

$$\kappa = \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\dot{c} \times \ddot{c}|\dddot{c})}{|\dot{c} \times \dot{c}|^2},$$

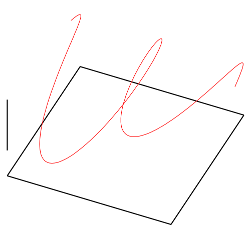
gdzie '$\times$' oznacza iloczyn wektorowy, $(\cdot|\cdot)$ iloczyn skalarny, $|\cdot|$ długość wektora w $\mathbb{R}^3$ a kropki odnoszą się do różniczkowania po parametrze.

Zadanie 2. Znajdź parametryzację naturalną (tzn. parametryzację długością łuku) krzywej

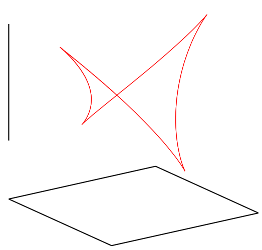
$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Zadanie 3. Oblicz krzywiznę i skręcenie następujących krzywych w $\mathbb{R}^3$:

$$t \longmapsto (1 - \cos t, t - \sin t, 4 \sin \frac{t}{2})$$



$$t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$$



Zadanie 4. Ewolutą krzywej c nazywamy krzywą utrworzoną przez środki krzywizny krzywej c. Wyznaczyć ewoluty krzywych z poprzedniego zadania.

Zadanie 5. Udowodnij, równoważność poniższych warunków dla krzywej w $\mathbb{R}^3$ o niezerowej krzywiźnie w każdym punkcie krzywej:

(1) wektory styczne do krzywej tworzą z pewnym kierunkiem stały kąt;
(2) wektory binormalne tworzą z pewnym kierunkiem stały kąt;
(3) wektory normalne główne są równoległe do pewnej płaszczyzny;
(4) stosunek skręcenia do krzywizny jest stały.