Analiza 1R
ćwiczenia 13 i 14

Zadanie 1 Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji odwrotnej obliczyć pochodną funkcji

$$]-1,1[\ni x \mapsto \arcsin x \in]-\pi,\pi[.$$

Zadanie 2 Zbadać różniczkowalność funkcji w podanych punktach

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+\exp(1/x)} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}, \quad x=0; \qquad g(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x\geqslant 1 \\ -\sqrt[3]{1-x} & x<1 \end{cases}, \quad x=1.$$

Zadanie 3 Niech

$$f(x)=\frac{x\log x}{x^2-1}$$

dla $x\in]0,1[\cup]1,\infty[$. Wykazać, że funkcję f da się dookreślić w punktach $x=0$ i $x=1$, tak aby była ona ciągła (ewentualnie jednostronnie). Zbadać tę funkcję i naszkicować wykres.

Zadanie 4 Niech $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x\neq 0$ i $g(0)=0$. Wykazać, że g jest gładka w zerze i ma wszystkie pochodne równe 0.

Zadanie 5 Obliczyć pochodną $f(x)=\arctan(x)+\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Naszkicować wykres.

Zadanie 6 Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres:

(a) $f(x):=\frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$;

(b) $f(x):=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

(c) $f(x):=(x-\frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

(d) $f(x):=\arcsin\frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{3//2}}$, $x\in\mathbb{R}$;

(e) $f(x):=(x+1)\operatorname{arc\,tg} x$, $x\in\mathbb{R}$.

Zadanie 7 Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}-2\sqrt{x}\right)$$

trzema sposobami: (1) rozwijając w szereg, (2) korzystając z reguły de l'Hospitala oraz (3) stosując zwykłe zabiegi algebraiczne.

Zadanie 8 Niech funkcja $f\ :]a,\infty[\to\mathbb{R}$ będzie różniczkowalna dwa razy i ma asymptotę w nieskończoności. Wykazać, że jeśli f jest wypukła, to wykres leży nad asymptotą, a jeśli wklęsła, to pod.

Zadanie 9 Obliczyć poniższe granice (dowolnie wybraną metodą). Proponuję część zrobić na ćwiczeniach a resztę w domu.

(a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$ (ą) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}\tan x}{1+\cos 4x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$

(ć) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2(x)}{x^6}$ (ę) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ (i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\log x}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$ (k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$ (ł) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\log(1+x)}{x^2}\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2}-\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)$ (n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

(ń) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ (o) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x}$

(ó) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$ (p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[n]{x}\log^m x$ (s) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(ś) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cot(x-a)$ (t) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)}$

(u) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (w) $\lim\limits_{x\to 0}\cos(ax)^{\frac{1}{x^2}}$

(y) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$ (z) $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\log x)^x$

(ź) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\frac{1}{\log(e^x-1)}}$ (ż) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$