Geometria Różniczkowa – ćwiczenia nr 14

Zadanie 1. Niech g będzie kanonicznym tensorem metrycznym na $\mathbb{R}^n$: $g = \sum_{i=1}^n \mathsf{d}x^i \otimes \mathsf{d}x^i$, gdzie $(x^1, \ldots, x^n)$ sa współrzędnymi kartezjańskimi. Niech $\Delta = -\mathsf{d}\delta - \delta\mathsf{d}$ będzie laplasjanem na formach. Wykazać, ze

$$\Delta(f\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k) = \left(\frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + \cdots \frac{\partial^2 f}{(\partial x^n)^2}\right)\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k$$

Wskazówka: Sprawdzić następujące wzory:

(1) $** = (-1)^{k(n-k)}$ na k-formach;
(2) $\delta = (-1)^{kn+1} * d*$ na $(k+1)$-formach;
(3) $*\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k = \mathsf{d}x^{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$;
(4) $*\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n = (-1)^{A(i,k,n)}\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i-1} \wedge \mathsf{d}x^{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$;
(5) $*\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j-1} \wedge \mathsf{d}x^{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n = (-1)^{B(i,j,k,n)}\mathsf{d}x^j \wedge (\imath(\partial_i)\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = k+1, \ldots, n$.

W dwóch ostatnich wzorach znaleźć jawną postać funkcji A i B.

Zadanie 2. Wyrazić laplasjan jednoformy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ we współrzędnych parabolicznych (ξ, η).

$$x = \sqrt{\xi\eta}$$
$$y = \tfrac{1}{2}(\xi - \eta)$$

Zadanie 3. Niech (S^2, g) oznacza sferę dwuwymiarową z metryką indukowaną z $\mathbb{R}^3$:

$$g = \mathsf{d}\vartheta \otimes \mathsf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta \mathsf{d}\varphi \otimes \mathsf{d}\varphi.$$

Sprawdzić, że różniczka funkcji $f(\varphi, \vartheta) = \cos\varphi \sin\vartheta$ jest formą własną laplasjanu, tzn

$$(\Delta - \lambda)\mathsf{d}f = 0.$$

Znaleźć wartość własną λ.

Zadanie 4. Niech S^2 będzie dwuwymiarową z metryką g indukowaną z $\mathbb{R}^3$

$$g = \mathsf{d}\vartheta \otimes \mathsf{d}\vartheta + \sin^2\vartheta \mathsf{d}\varphi \otimes \mathsf{d}\varphi.$$

Niech x, y, z oznaczają funkcje na S^2 zadane przez obcięcie odpowiednich współrzędnych z $\mathbb{R}^3$ do sfery S^2. Sprawdzić, czy formy $\mathsf{d}x$, $\mathsf{d}y$, $\mathsf{d}z$, $*\mathsf{d}x$, $*\mathsf{d}y$, $*\mathsf{d}z$ na S^2 są formami własnymi laplasjanu. Z jakimi wartościami własnymi?

Zadanie 5. Znaleźć metrykę na torusie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ pochodzącą od zanurzenia w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = (a + b\sin\theta)\cos\varphi \\ y = (a + b\sin\theta)\sin\varphi \\ z = b\cos\theta \end{cases}$$

Wyrazić laplasjan na funkcjach, 1- i 2-formach we współrzędnych (θ, φ).