

Analiza 1R
ćwiczenia 16 (piątek, 6 grudnia)

Zadanie 1 Rozwinąć w szereg Taylora funkcję $x \mapsto \arctan(x)$ wokół $x_0 = 0$. Pokazać, że reszta w postaci Lagrange'a dąży do zera dla n dążącego do nieskończoności dla x z pewnego odcinka zawierającego x_0 .

Zadanie 2 Rozwinąć w szereg Taylora funkcję $x \mapsto \sqrt{x-1}$ wokół $x_0 = 2$. Pokazać, że reszta w postaci Lagrange'a dąży do zera dla n dążącego do nieskończoności dla x z pewnego odcinka zawierającego x_0 .

Zadanie 3 Wykazać, że dla $a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+ka} \right) = (1+a)^{1/a}.$$

Wskazówki: (1) oszacowanie $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$, (2) $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+ka}$ jest sumą Riemanna dla pewnej funkcji.