

Analiza 1R  
ćwiczenia 17 i 18

**Zadanie 1** Rozgrzewka: Obliczyć całki nieoznaczone, tzn znaleźć funkcje pierwotne. W nawiasach wymienione są narzędzia jakie mogą być potrzebne przy rozwiązywaniu

(a)  $\int (x^2 - 2x + 3)e^x dx$  (całkowanie przez części lub zgadywanie);

(b)  $\int \sin^3 x dx$  (podstawienie);

(c)  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$  (suma Fouriera);

(d)  $\int \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$  (całkowanie przez części, podstawienie);

(e)  $\int x^{-\frac{3}{2}} \log(1 + \sqrt{x}) dx$  (całkowanie przez części, podstawienie, albo podstawienie i po drodze ułamki proste...)

**Zadanie 2** Całkowanie funkcji wymiernych: rozkładamy na ułamki proste postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^k}.$$

Trudniejsze jest tylko całkowanie wyrażeń z wielomianem kwadratowym w wyższej potędze w mianowniku

(a)  $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx;$

(b)  $\int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3(x-4)} dx;$

(c)  $\int \frac{1}{x^4 - 1} dx;$

(d)  $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1+x^2)^3} dx;$

(e)  $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} dx;$

**Zadanie 3** Funkcje wymierne od trygonometrycznych:

(a)  $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx;$

(b)  $\int \frac{1}{\sin x \sin 2x} dx;$

$$(c) \int \frac{2 \tan x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx;$$

**Zadanie 4** Wykazać, że jeśli  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ciągła to

$$\int_0^\pi x \varphi(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \varphi(\sin(x)) dx.$$

Korzystając z tego wykazać, że

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{(1 + \cos^2 x)^2} = \frac{1}{8} \pi (\pi + 2).$$

**Zadanie 5** Dla  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  wyliczyć  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ . Wykazać, że  $I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n}$  oraz  $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ .

**Zadanie 6** Dalsze ćwiczenia (część na zajęciach, a część w domu, niektóre są trudne)

$$(a) \int \frac{\log |1 - x|}{x^{n+1}} dx;$$

$$(b) \int \left( \frac{x}{\arctan x} - 1 \right)^{-2} dx;$$

$$(c) \int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1};$$

$$(d) \int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^4 + 1};$$

$$(e) \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^4 + 1};$$

$$(f) \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$(g) \int \frac{(x + 1) dx}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 4x + 5)};$$

$$(h) \int \frac{1}{x^2} \arcsin x dx;$$

$$(i) \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1 - x^3}};$$

$$(j) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^n + 1}};$$

$$(k) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^n - 1}};$$

$$(l) \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^4}};$$

- (m)  $\int \frac{x dx}{x^3 + 1}$ ;
- (n)  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ ;
- (o)  $\int \sin(\log x) dx$ ;
- (p)  $\int \frac{\operatorname{tg} 2x dx}{2 - 3 \cos^2 x}$ ;
- (q)  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$ ;
- (r)  $\int \frac{\sin x \cos^3 x dx}{2 + \sin^2 x}$ ;
- (s)  $\int e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx$ ;
- (t)  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + x}}$ ;
- (u)  $\int \frac{dx}{1 + x + \sqrt{x^2 + x}}$ ;
- (w)  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x - x^2}}$ ;
- (x)  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x - x^2}}$ ;
- (y)  $\int \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 4} dx$ .