Analiza 1R
ćwiczenia hmm... nie wiadomo które

Zadanie 1 Całki:

(a) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$ – podstawiamy $t=\sqrt{x}$, dalej jest łatwo;

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^p x}$ dla $p \in \mathbb{R}$ – nie mam dobrego pomysłu (po podstawieniu $t = \tan x$ wychodzi całka, którą nadal nie wiem jak policzyć), może Państwo coś wymyślą?;

(c) $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$ – jest to jedna z typowych całek, jednak na taką jeszcze nie trafiliśmy; należy podstawić $t = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$ i bardzo cierpliwie liczyć do końca;

(d) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ – można zastosować podstawienie hiperboliczne $x = \sinh t$ a następnie jedno ze standardowych podstawień $u = \tanh\frac{t}{2}$; działa ono tak samo jak podobne podstawienie $\tan\frac{x}{2}$;

(e) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$ – podstawiamy $t = \tan\frac{x}{2}$, całka jest po przedziale niezwartym, tzn $\int_0^\infty$, co traktujemy jako $\lim_{R\to\infty}\int_0^R$;

(f) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ – podstawiamy $t = \sqrt{e^x-1}$;

(g) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$ – w miarę sprawnie liczy się pierwszym podstawieniem Eulera;

(h) $\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx$, $m,n \in \mathbb{N}$, $a<b$ – wiele razy przez części zmniejszając jeden wykładnik a zwiększając drugi;

(i) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$ – wiele razy przez części zaczynając od $f(x) = (1-x^2)^n$, $g'(x) = 1$;

(j) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$ – pierwsze podstawienie Eulera lub stosowne podstawienie trygonometryczne (np $x = \frac{1}{4}\tan t$);

(k) $\int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ – podstawiamy $t = \tan x$, całkę po odcinku $[-\pi,\pi]$ trzeba jednak w takim wypadku podzielić na całki po mniejszych odcinkach na których podstawienie jest dobre;

(l) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$ – podstawiamy tangens dzieląc na dwie całki;

(m) $\int_0^\pi \cos^n x\cos nx\,dx$ – skorzystać z $\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$;

(n) $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$, $n \in \mathbb{N}$ – skorzystać z $\sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$.

Zadanie 2 Szeregi:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$; (10) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-2)^n$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(10-p\sqrt[n]{5}\right)^n$; (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\dots\cdot(n+n)}}$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$; (14) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1})^p$;

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin\frac{\pi}{2^n}$; (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$;

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$; (18) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$;

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$; (20) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$; (21) $\sum_{n=3}^{\infty} (\log\log n)^{-\log n}$;

(22) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$; (23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})$;

(24) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1+\frac{1}{n})$; (25) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n(n+1)}{n^2+1}$;

(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{1}{n}$; (27) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt[n]{n^3+n}$;

(28) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1}$; (29) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n^2\pi}{n+1}$;

(30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n}$; (31) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$;

(32) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5\sin n}\right)\sin n\alpha$; (33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n+5\sin n}$;

(34) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2}-\sqrt{n}\right)$; (35) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

(36) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^{n}$; (37) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{E(\sqrt{n})}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(38) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{E(n/\sqrt{5})}$; (39) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{E(n\sqrt{2})}$;

(40) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt[n]{n})^n$; (41) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}}$;

(42) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{(-1)^n}{2n}\right)$.

Wskazówki (9) $a_n \leqslant 2^{-\sqrt{n}} \leqslant n^{-2}$ dla p.w.n; (10),(17),(36) $\lim|a_n| =?$; (11),(13),(16) $\lim\sqrt[n]{|a_n|} = ?$; (12), (40) $\lim na_n =?$; (18) $a_n < n^{-2}$ dla p.w.n; (20) porównać z $\sum\frac{1}{n}$ lub $\sum\frac{1}{n^2}$; (21) $\log\log n > e^{-2}$ dla p.w.n; (22) $a_n > \frac{1}{n}$ dla p.w.n; (26) $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$, $|\sin x| \leqslant |x|$; (27) $\frac{1}{n} \leqslant \sqrt[n]{n^3+n}-1 \leqslant \frac{1}{2}$ dla p.w.n; (31) $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$; (33) skorzystać z (32); (37) oszacować $\sum_{n=k^2}^{k^2+2k} a_n$; (39) sprawdzić, że $a_n \searrow 0$ lub oszacować $|a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}|$; (41) $\lim n^{1-p}a_n =?$; (42) oszacować a_{2k-1} i a_{2k}.

Rozwiązania: Bezwzgl. zbieżne: (1), (3), (4), (9), (13), (16), (18), (21), (23), (26),(32),(34),(35); warunkowo: (2), (24), (28), (29), (30), (33), (38), (39); rozbieżne: (6), (7), (8), (10), (12), (15), (17), (22), (25), (27), (36), (37), (40); (5) zb. $\iff p>1$; (11) zb.(bezwzgl.) $\iff 9<p<11$; (14) zb.(bezwzgl.) $\iff p>2$; (19) zb. $\iff p>1$; (20) zb. $\iff (q<0)$ lub $(q=0, p<-1)$; (31) zb. $\iff \alpha\in\pi\mathbb{Z}$; (40) $na_n = (1+x_n)^n$, gdzie $x_n = -(\sqrt[n]{n}-1)^2$, więc $nx_n \to 0$; (41) zb. $\iff p<0$