Analiza I R

zadania domowe, seria 2

Zadanie 1. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Stolza:

$\lim \frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6} = \frac{1}{6}$;

$\lim \left(\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^5} - \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = 2(\sqrt{2}-1)$;

$\lim \left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}}{n} - \frac{n}{2}\right) = 1$;

$\lim \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 2$;

$\lim \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$;

$\lim \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}$;

$\lim \frac{n(2n-1)}{\sqrt[n]{(2n)!}} = \frac{e^2}{2}$.

Zadanie 2. Sprawdzić, że wzór

$$d(x,y) := |(|x| - |y|)| + |\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y|$$

określa metrykę na $\mathbb{R}$. Wyznaczyć kule (względem d) o środku $x_o = 4$ i promieniach $r = 3, 4, 5, 6$. Pokazać, że $K(4; r)$ jest przedziałem $\iff$ $0 < r \leqslant 2$ lub $r \geqslant 6$.

Zadanie 3. Niech Z – dowolny zbiór niepusty, $P := \{A \in 2^Z \ : \ A \text{ skończony}\}$. Wykazać, że wzór $d(A, B) := |A \div B|$ określa metrykę w zbiorze P. Opisać kule i odcinki w P względem tej metryki.

Zadanie 4. Niech (x_n) będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X, d). Rozważmy następujące warunki $(C), (C_1), (C_2), (C_3)$:

(C) $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : d(x_m, x_n) \leqslant \epsilon$ (*Cauchy*);

(C_1) $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : d(x_n, x_N) \leqslant \epsilon$;

(C_2) $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \exists x \in X : \forall n \geqslant N : d(x_n, x) \leqslant \epsilon$;

(C_3) $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \epsilon$.

Wykazać, że $(C_1) \iff (C) \iff (C_2)$, $(C) \Rightarrow (C_3)$. Znaleźć przykład pokazujący, że $(C_3) \not\Rightarrow (C)$.

Zadanie 5. [18] Wyznaczyć punkty ciągłości funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, jeśli

(a) $f(x) := \lim \dfrac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ dla $x > 0$;

(b) $f(x) := \begin{cases} x(x^2-2), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Zadanie 6. Dowieść, że :

(a) jeśli podzbiory A i B przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są zwarte, to zbiór $A + B := \{a + b \ : \ a \in A\,,\ b \in B\}$ też jest zwarty;

(b) jeśli A jest zwarty, a B domknięty, to $A + B$ jest domknięty. Podać przykład domkniętych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^2$, dla których zbiór $A + B$ nie jest domknięty.

Zadanie 7. Wykazać, że jeżeli X i Y są przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem, to następujące warunki są równoważne:

(a) f jest ciągłe (tzn. przeciwobrazy zbiorów otwartych w Y są otwarte w X);

(b) przeciwobrazy zbiorów domkniętych w Y są domknięte w X;

(c) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego podzbioru $A \subset X$.

Zadanie 8. Niech X będzie przestrzenią zwartą, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem ciągłym. Wykazać, że:

(a) jeśli $A \subset X$ jest domknięty, to $f(A)$ jest domknięty;

(b) jeśli f jest injektywne, to jest homeomorfizmem X na $f(X)$.

Zadanie 9. W zbiorze $\mathcal{C}([0,1])$ funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$ wprowadzamy metrykę $d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]}(|f(t) - g(t)|)$. Zbadać otwartość, domkniętość, zwartość i spójność zbioru $Z = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \ f(0)f(1) > 0\}$.

Zadanie 10. Zbadać, czy podzbiór $\mathbb{R} \supset Z_p = \{px^2 - 2x + (2p-1) \leqslant 0\}$ jest otwarty, domknięty, zwarty, spójny, w zależności od wartości $p \in \mathbb{R}$.