ANALIZA RI,
Zadania seria I

(1) Wykazać tożsamość $A \cup (B \setminus C) = \big[(A \cup B) \setminus C\big] \cup (A \cap C)$.

(2) Różnicą symetryczną $A \div B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Wykazać, że $A \div B \subset (A \div C) \cup (C \div B)$ oraz, że następujące zdania są równoważne:

a) "składniki sumy po prawej stronie są rozłączne";
b) "inkluzja staje się równością";
c) $A \cap B \subset C \subset A$.

(3) Uprościć warunek $(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) = B$.

(4) Znaleźć kresy dolne i górne zbiorów

$$A = \left\{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{i} \quad B = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(5) Wyprowadzić wzory:

a) $0 \leqslant E(x+y) - E(x) - E(y) \leqslant 1$,
b) $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx)$.

(6) Która z dwu liczb jest większa: $\sqrt[10000]{10001}$, czy $\sqrt[9999]{10000}$. Wsk. Nierówność Bernoulliego.

(7) Pokazać, że dla dowolnego odwzorowania f zachodzą związki

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
d) $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Czy związki te zachodzą dla dowolnej relacji?

(8) Znaleźć najmniejszą relację równoważności w zbiorze $X = \{a, b, c, d, e\}$, zawierającą pary $(a, b), (c, d), (c, e)$. Znaleźć klasy abstrakcji.

(9) Czy relacja R w zbiorze $X = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ zdefiniowana tak: $(n, m) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n^2 - m^2$ jest podzielne przez 4, jest relacją równoważności. Jeżeli jest, to wskazać klasy abstrakcji.

(10) Niech $a, A > 0$ i $a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{A}{a})$ definiujemy indukcyjnie $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}})$. Pokazać, że

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}} .$$

(11) Niech $k \in \mathbb{N}$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ ciąg $x_n = n^a(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n-1})$ jest zbieżny i do jakiej granicy?

(12) Dowieść, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n^2 + bn + c}\right)^2 = 1$$

dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wsk. Zacząć od przypadku $a < 0$. Zastosować nierówność Bernoulliego.

(13) Dowieść, że jeżeli ciąg liczb wymiernych $(\frac{p_n}{q_n})$ (p_n całkowite, q_n naturalne) jest zbieżny do liczby niewymiernej, to ciąg $(\frac{1}{q_n})$ jest zbieżny do zera.

(14) Znaleźć granicę ciągu

$$x_n = \frac{(n+1)^{10} + (n+2)^{10} + \cdots + (n+100)^{10}}{n^{10} + 10^{10}}.$$

(15) Wykazać, że:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} - \frac{2}{\sqrt[n]{4}-1}\right) = \frac{1}{2}$,
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n+2} \cdots \frac{n}{3n} = 0$.

(16) Wyznaczyć kresy zbioru $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, zbiór puntów skupienia ciągu (t.j. granic podciągów), granicę górną i granicę dolną ciągu (x_n), jeśli $x_n = \cos \frac{5\pi}{2n}$.

(17) Udowodnić, korzystając z twierdzenia Stolza, równości

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6} = \frac{1}{6}$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$.

(18) Zbadać zbieżność i ew. znaleźć granicę ciągu zadanego rekurencyjnie:

a) $x_0 > 0$ dane, $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$,

b) $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$.