Analaliza I R

egzamin pisemny, 29 stycznia 2013

Zadanie 1. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Udowodnić następującą równoważność:

$$(X \text{ jest przestrzenią zwartą}) \iff \left(\begin{array}{c}\text{każdy ciąg w } X\text{, mający dokładnie} \\ \text{jeden punkt skupienia, jest zbieżny}\end{array}\right)$$

Wskazówka nieobowiązkowa: Dowodząc $\Leftarrow$ można zacząć od pokazania, że z warunku po prawej stronie wynika, że każdy ciąg ma punkt skupienia.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{x}{e^x - 1} > \frac{2}{e^x + 1}.$$

Zadanie 3. W punkcie (a) obliczyć całkę, w punkcie (b) znaleźć funkcję pierwotną:

$$\textbf{(a)} \quad \int_0^1 \frac{\mathsf{d}x}{5 + 3\sqrt{1 - x^2}}, \qquad\qquad \textbf{(b)} \quad \int \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log^2 x} \right) \mathsf{d}x.$$

Zadanie 4. Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 x}{1 + n^7 x^2}$$

jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz, że $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Uwaga: Proszę dokładnie zrozumieć strukturę logiczną zadania pierwszego i dobrze zastanowić się, co naprawdę jest dowodzone! Na wszelki wypadek to samo twierdzenie zapisujemy przy pomocy znaczków:

$$(X \text{ jest przestrzenią zwartą}) \iff \left\{ \forall (x_n) \left(\begin{array}{c} (x_n) \text{ ma dokładnie} \\ \text{jeden punkt skupienia} \end{array} \right) \Rightarrow (x_n) \text{ jest zbieżny} \right\}$$