

Egzamin ustny z Analizy II

semestr letni 2008/2009

Szanowni Państwo, poniżej znajdują Państwo spis pytań na egzamin ustny z analizy II. Egzamin będzie odbywał się według tych samych zasad co w zeszłym semestrze. Przypominam, że osoba zdająca na trójkę odpowiada na trzy pytania proste, osoba zdająca na czwórkę odpowiada na dwa proste i jedno trudne, przy czym ma prawo do wybrania pytania trudnego spośród przedstawionych przeze mnie propozycji, a osoba zdająca na piątkę odpowiada na dwa trudne i jedno łatwe bez możliwości negocjacji. Ze względu na to, że niektóre pytania są bardzo obszerne zastrzegam sobie prawo do zmniejszenia liczby pytań do dwóch.

I. PYTANIA ZWYKŁE

Pytanie 1. Przestrzeń metryczna: definicja, przykłady, przykłady metryk w \mathbb{R}^n , równoważność metryk. *Odpowiadając na to pytanie należy podać definicję metryki i przykłady przestrzeni metrycznych, najlepiej różne, tzn nie samo \mathbb{R}^n . Należy znać przykłady metryk w \mathbb{R}^n i umieć rysować kule w tych metrykach, znać pojęcie równoważności metryk i jego konsekwencje dla pojęć ciągłości i zbieżności oraz umieć uzasadnić równoważność trzech używanych przez nas metryk w \mathbb{R}^n , można się ograniczyć do $n = 2$.*

Pytanie 2. Zbiory otwarte, domknięte, zwarte i spójne w \mathbb{R}^n . *Odpowiadając na to pytanie należy znać podstawowe fakty służące do sprawdzania czy dany zbiór jest ODZS. Chodzi tu o zachowanie poszczególnych własności względem odwzorowań ciągłych, zależności między własnościami (np. że zbiór ograniczony i domknięty jest zwarty w \mathbb{R}^n) oraz oczywiście definicje poszczególnych pojęć z przykładami.*

Pytanie 3. Ciągłość odwzorowań przestrzeni metrycznych, w szczególności odwzorowań $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. *Należy podać definicję ciągłości w punkcie, przykłady odwzorowań ciągłych i nieciągłych, opisać trudności jakie napotyka się przy badaniu ciągłości funkcji wielu zmiennych (wraz z przykładami).*

Pytanie 4. Przestrzeń wektorowa unormowana, przestrzeń Banacha. *Należy podać definicję normy, uzasadnić, że przestrzeń unormowana jest metryczna, znać pojęcie równoważności norm, omówić używane normy w \mathbb{R}^n . Podać przykłady przestrzeni wektorowych unormowanych innych niż \mathbb{R}^n , znać definicję przestrzeni Banacha i podać przynajmniej jeden przykład inny niż \mathbb{R}^n .*

Pytanie 5. Definicja pochodnej w punkcie odwzorowania między przestrzeniami Banacha. *Należy podać definicję pochodnej, omówić szczegółowo przypadek odwzorowania z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m , tzn. jak wygląda pochodna, jak badamy różniczkowalność itp.*

Pytanie 6. Definicja pochodnej kierunkowej i jej związek z pochodną odwzorowania w punkcie. *Należy podać definicję pochodnej kierunkowej i fakty z których wynika związek pochodnej kierunkowej z pochodną. Należy omówić także pojęcie pochodnej cząstkowej i podać przykłady.*

Pytanie 7. Formalne prawa różniczkowania. *Należy znać wzory na pochodną sumy odwzorowań, iloczynu odwzorowania przez liczbę i przez funkcję oraz złożenia odwzorowań.*

Pytanie 8. Norma odwzorowania liniowego. *należy podać definicję normy odwzorowania i podstawowe fakty, np. oszacowanie na normę iloczynu odwzorowań. Należy też wypowiedzieć się o związku ograniczoności z ciągłością i szczególnej sytuacji w przestrzeniach skończonego wymiarowych.*

Pytanie 9. Definicja ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych i warunków konieczny dla funkcji różniczkowalnych. Warunki wystarczające. *Oprócz rzeczy wymienionych w samym pytaniu, należy jeszcze wspomnieć o istnieniu innych niż ekstrem punktów krytycznych.*

Pytanie 10. Pochodne wyższych rzędów *Należy zdefiniować pochodną k -tego rzędu, wiedzieć jakiego rodzaju obiektami są te pochodne. Podać kryterium różniczkowalności k -tego rzędu w terminach pochodnych cząstkowych.*

Pytanie 11. Wzór Taylora. *Należy umieć zapisać wzór Taylora dla odwzorowania $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, sformułować twierdzenie o reszcie i wiedzieć do czego się go używa (np. w dowodzie warunku wystarczającego istnienia ekstremum).*

Pytanie 12. Twierdzenie o funkcji odwrotnej, sformułowanie i zastosowania. *Chyba nie ma czego objaśniać*

Pytanie 13. Twierdzenie o funkcji uwikłanej, sformułowanie i zastosowania. Obliczanie pochodnej funkcji uwikłanej. *Oprócz sformułowania twierdzenia należy wypisać wzory na pochodną.*

Pytanie 14. Poszukiwanie ekstremów funkcji zadanej w sposób uwikłany. Warunki konieczne i wystarczające. *Obliczanie pierwszej pochodnej funkcji zadanej w sposób uwikłany i wzór na drugą pochodną w punkcie krytycznym.*

Pytanie 15. Definicja powierzchni wymiaru k zanurzonej w \mathbb{R}^n , przykłady powierzchni, sposoby zadawania powierzchni. *Należy podać definicję i kilka różnych przykładów. Należy także omówić metody zadawania powierzchni przy pomocy równań i parametryzacji oraz znać warunki jakie muszą być spełnione, aby równania, czy parametryzacja zadawały powierzchnię.*

Pytanie 16. Przestrzeń styczna do powierzchni. *Odpowiadając na to pytanie należy powiedzieć jak definiuje się przestrzeń styczną do powierzchni, jak wprowadza się w niej strukturę wektorową, jaki ta przestrzeń ma wymiar itp.*

Pytanie 17. Metoda mnożników Lagrange'a. *W tym pytaniu chodzi o sformułowanie twierdzenia Lagrange'a i wykazanie się zrozumieniem skąd się to twierdzenie bierze (szkieł dowodu). Należy ponadto wiedzieć w jaki sposób bada się charakter znalezionego punktu krytycznego.*

Pytanie 18. Odwzorowania zblizające, zasada Banacha wraz z uzasadnieniem. *Ten dowód jest na tyle prosty, że chyba każdy może go przedstawić.*

Pytanie 19. Twierdzenie Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności, idea dowodu. *Prócz sformułowania samego twierdzenia należy przedstawić metodę dowodu, tzn opisać główne punkty i wskazać na zastosowanie zasady Banacha.*

Pytanie 20. Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu jednorodne i niejednorodne. Własności przestrzeni rozwiązań. *Co to jest równanie różniczkowe liniowe. Własności zbioru rozwiązań równania jednorodnego i równania niejednorodnego.*

Pytanie 21. Rezolwenta równania różniczkowego liniowego jednorodnego i jej własności. Przypadek równania o stałych współczynnikach. *Definicja rezolwenty i jej własności. Postać rezolwenty w przypadku równania o stałych współczynnikach i sposób jej wyznaczania.*

Pytanie 22. Równania różniczkowe liniowe wyższego rzędu jednorodne o stałych współczynnikach. Postać rozwiązań. *Metoda rozwiązywania poprzez sprowadzenie do równania pierwszego rzędu. Postać rozwiązań (z uzasadnieniem, dlaczego właśnie tak).*

Pytanie 23. Metoda uzmienniania stałych dla równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu niejednorodnych.

Pytanie 24. Metoda uzmienniania stałych dla równań różniczkowych liniowych wyższego rzędu niejednorodnych. *Czym się różni przypadek równania pierwszego rzędu od przypadku wyższego rzędu.*

Pytanie 25. Wzór Liouville'a. Zastosowanie do rozwiązywania równań różniczkowych liniowych wyższego rzędu o współczynnikach zależnych od czasu.

Pytanie 26. Definicja całki Riemanna na \mathbb{R}^n . Własności całki. Funkcje całkowlne. *Należy podać definicję i wymienić własności (liniowość, addytywność względem obszaru...). Kryteria całkowlności i twierdzenie Lebesgue'a (bez dowodów, mile widziane wszelkie uzasadnienia)*

Pytanie 27. Całka po zbiorze ograniczonym, zbiory mierzalne w sensie Jordana. *Definicja całki po zbiorze innym niż kostka, po jakich zbiorach można całkować, co to są zbiory mierzalne w sensie Jordana...*

Pytanie 28. Twierdzenie Fubinięgo. *Sformułowanie twierdzenia, zastosowanie. Wszelkie przypadki szczególne jeśli np. dla pewnego x całka $\int f(x,y)dy$ nie istnieje mimo, że f całkowlna.*

Pytanie 29. Twierdzenie o zamianie zmiennych dla całki Riemanna na \mathbb{R}^n *Należy znać sformułowanie twierdzenia, wiedzieć dlaczego we wzorze jest wartość bezwzględna Jacobianu, podczas kiedy na \mathbb{R}^1 tego nie ma, znać Jacobiany podstawowych zamian zmiennych: kartezjańskie-biegunowe-sferyczne.*

Pytanie 30. Co to jest i do czego służy różniczkowlany rozkład jedności?

Pytanie 31. Definicja całki niewłaściwej na \mathbb{R}^n , $n > 1$. Różnice w stosunku do przypadku $n = 1$. *Warto znać jakiś przykład pokazujący te różnice.*

Pytanie 32. Całka z parametrem, ciągłość i różniczkowlność względem parametru (przypadek zwartego obszaru całkowania). *Należy wiedzieć co to jest całka z parametrem, po co się takie rzeczy rozważa i umieć sformułować podstawowe twierdzenia, dzięki którym ta całka jest użytecznym narzędziem.*

Pytanie 33. Całka z parametrem, ciągłość i różniczkowlność względem parametru (przypadek niezwartego obszaru całkowania). *Należy wiedzieć co to jest całka z parametrem, po co się takie rzeczy rozważa i umieć sformułować podstawowe twierdzenia, dzięki którym ta całka jest użytecznym narzędziem.*

Pytanie 34. Jednostajna zbieżność całek z parametrem. *Należy znać i rozumieć definicję, wiedzieć czym to się różni od zbieżności punktowej i wiedzieć po co się takie pojęcie wprowadza.*

II. PYTANIA WYMAGAJĄCE PRZEPROWADZENIA DOWODU

Pytanie 1. Odwzorowania liniowe przestrzeni Banacha. Ciągłość, ograniczoność. Przypadek przestrzeni skończenie wymiarowych.

Pytanie 2. Wyprowadzić wzór na pochodną złożenia odwzorowań.

Pytanie 3. Udowodnić twierdzenie o wartości średniej dla odwzorowań klasy C^1 .

Pytanie 4. Udowodnić, że druga pochodna odwzorowania w punkcie jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym.

Pytanie 5. Twierdzenie Taylora o reszcie z dowodem i jego zastosowania.

Pytanie 6. Twierdzenie o funkcji odwrotnej, szkic dowodu.

Pytanie 7. Twierdzenie o funkcji uwikłanej, szkic dowodu.

Pytanie 8. Twierdzenie o rzędzie, czyli kiedy równania określają powierzchnię wraz z dowodem.

Pytanie 9. Twierdzenie Lagrange'a o ekstremach związanych wraz z dowodem.

Pytanie 10. Sformułowanie warunku wystarczającego istnienia ekstremum dla ekstremów związanych wraz z uzasadnieniem.

Pytanie 11. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym odwzorowania zbijającego z dowodem.

Pytanie 12. Wyprowadzenie wzoru na rezolwentę równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu o stałych współczynnikach.

Pytanie 13. Wyprowadzenie wzoru Liouville'a. Zastosowanie do rozwiązywania równań różniczkowych liniowych wyższego rzędu o współczynnikach zależnych od czasu.

Pytanie 14. Twierdzenie Lesbeque'a o funkcjach całkowalnych w sensie Riemanna, szkic dowodu.

Pytanie 15. Twierdzenie Fubiniego, szkic dowodu.

Pytanie 16. Twierdzenie o zamianie zmiennych dla całki na \mathbb{R}^n , szkic dowodu. *Dowód jest długi i dość trudny, ale należy znać podstawowe punkty dowodu i wiedzieć gdzie są jakie trudności.*

Pytanie 17. Różniczkowalny rozkład jedności - sformułowanie i dowód twierdzenia o istnieniu.

Pytanie 18. Ciągłość całki z parametrem względem parametru, twierdzenia w przypadku zwartego i niezwartego obszaru całkowania. Jeden z dowodów.

Pytanie 19. Różniczkowalność całki z parametrem względem parametru, twierdzenia w przypadku zwartego i niezwartego obszaru całkowania. Jeden z dowodów.

Pytanie 20. Definicja i kryteria jednostajnej zbieżności całek z parametrem.