Analiza I R

egzamin przykładowy

Zadanie 1. Niech $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niepustych zbiorów zwartych, takich, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi zawieranie $F_{n+1} \subset F_n$. Udowodnić, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność

$$\sin x < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}}.$$

Wskazówka: $\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność ciągów:

$$a_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3n} - 1\right)^{n^2}.$$

Zadanie 4. Obliczyć granicę

$$\lim_{M\to\infty} \int_2^M \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{\mathsf{d}x}{x^2}.$$

Zadanie 5. Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną szeregu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\log(1+n^2x^2).$$

Udowodnić, że $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \pi$.