Metoda opearacji elementarnych

© G.Cieciura

0.1 Macierze

Definicja. Niech Z będzie zbiorem, a m, n — liczbami naturalnymi; zwykle w tym kontekście $Z = \mathbb{K}$ jest ciałem. *Macierzą* wymiaru $m \times n$ o *wyrazach* ze zbioru Z nazywa się układ mn elementów ${A^i}_j$ zbioru Z, indeksowanych dwoma wskaźnikami: $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,n}$. Do oznaczania macierzy używać będziemy zwykle liter wytłuszczonych, pisząc $\boldsymbol{A} = [{A^i}_j]_{(i,j)\in\overline{1,m}\times\overline{1,n}}$ bądź też, w bardziej rozwiniętej lecz obrazowej postaci, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} {A^1}_1 & {A^1}_2 & \dots & {A^1}_n \\ {A^2}_1 & {A^2}_2 & \dots & {A^2}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ {A^m}_1 & {A^m}_2 & \dots & {A^m}_n \end{bmatrix}$.

Ta ostatnia konwencja uzasadnia nazywanie wskaźników i, j numerami *wiersza* i *kolumny* wyrazu ${A^i}_j$, zaś liczb m, n — *liczbą wierszy i kolumn* macierzy([1]).

Przykład. Jeśli $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, to $\left\{ \begin{matrix} m = 2,\ n = 3,\ {A^1}_1 = 2,\ {A^1}_2 = -1 \\ {A^1}_3 = 1,\ {A^2}_1 = -3,\ {A^2}_2 = 0,\ {A^2}_3 = 4 \end{matrix} \right\}$.

Uwaga. Spotyka się często także dwie inne konwencje związane z macierzami: niektórzy zamiast ${A^i}_j$ wolą pisać $A_{i,j}$ (lub A_{ij}, pamiętając, że ij jest tu uproszczoną formą zapisu pary (i,j), a nie iloczynem); inni z kolei wolą zapis A^i_j. Nasza notacja ma tę zaletę, że po jej przyswojeniu łatwo się przestawić na każdą z dwu pozostałych, np. $A^3_4 = {A^3}_4$, $A_{3,1} = {A^3}_1$.

Oznaczenia. Dla $m, n \in \mathbb{N}$ symbol $\mathbb{K}^m_n$ oznacza zbiór wszystkich macierzy wymiaru $m \times n$ (tzn. mających m wierszy i n kolumn) o wyrazach z $\mathbb{K}$. Jeśli $\boldsymbol{A} \in {\mathbb{K}^m}_n$, to wektory $\boldsymbol{A}^1, \dots, \boldsymbol{A}^m$ są kolejnymi wierszami, natomiast wektory $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n$ — kolumnami macierzy $\boldsymbol{A}$. Np. jeśli $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix} \in {\mathbb{R}^2}_3$, to

$$\boldsymbol{A}^1 = [1, 3, -2],\ \boldsymbol{A}^2 = [7, -4, 5],\ \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy dla skrótu $\boxed{\mathbb{K}_n := {\mathbb{K}^1}_n,\ \mathbb{K}^m := {\mathbb{K}^m}_1}$, wtedy w ogólnym przypadku

$$\boldsymbol{A}^i = [A^i_1, \dots, A^i_n] \in \mathbb{K}_n\ (^2) \qquad \text{oraz} \qquad \boldsymbol{A}_j = \begin{bmatrix} A^1_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

[1] Mówiąc ściślej macierz $\boldsymbol{A}$ jest odwzorowaniem $(i,j) \mapsto {A^i}_j$ zbioru $\overline{1,m} \times \overline{1,n}$ w zbiór Z; element ${A^i}_j \in Z$, zwany (i,j)-wyrazem macierzy $\boldsymbol{A}$, jest wartością tego odwzorowania w punkcie (i,j) jego dziedziny. Jak się przekonamy, oznaczanie (i,j)-wyrazu symbolem $\boldsymbol{A}(i,j)$ (zamiast ${A^i}_j$) byłoby mniej poręczne i mogło by prowadzić do niejasności.

[2] Piszemy $[A_1, \dots, A_n]$ zamiast $\begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{bmatrix}$, by wyraźniej wyodrębnić wyrazy; niektórzy lubią rozdzielać przecinkami także wyrazy macierzy wielowierszowych.

Operacje algebraiczne na macierzach

$\mathbb{K}^m_{\ n}$ jest przypadkiem szczególnym zbioru $\mathbb{K}^X$ wszystkich funkcji $X \to \mathbb{K}$, mianowicie dla $X := \overline{1,m} \times \overline{1,n}$. Zatem możemy w tym zbiorze 'w zwyczajny sposób' (jak dla funkcji) określić operacje dodawania i mnożenia przez liczby:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} := [A^i{}_j + B^i{}_j]_{(i,j)\in X} \ ,$$

tzn.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall (i,j) \in X : \ C^i{}_j = A^i{}_j + B^i{}_j,$$

czyli

$$\begin{bmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A^m{}_1 & \dots & A^m{}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ B^m{}_1 & \dots & B^m{}_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A^1{}_1 + B^1{}_1 & \dots & A^1{}_n + B^1{}_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A^m{}_1 + B^m{}_1 & \dots & A^m{}_n + B^m{}_n \end{bmatrix};$$

$$\lambda \boldsymbol{A} := [\lambda A^i{}_j]_{(i,j)\in X}, \quad \text{tzn.} \quad \lambda \begin{bmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A^m{}_1 & \dots & A^m{}_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda A^1{}_1 & \dots & \lambda A^1{}_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda A^m{}_1 & \dots & \lambda A^m{}_n \end{bmatrix}.$$

Jak wiemy, $\mathbb{K}^m_{\ n}$ z tak określonymi działaniami stanowi przestrzeń wektorową.

Podkreślmy, że sumę $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ definiujemy jedynie wtedy, gdy macierze $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ mają ten sam wymiar: obie muszą mieć jednakową liczbę wierszy, a także jednakową liczbę kolumn; w szczególności np. nie definiuje się sumy wektora kolumnowego i wektora wierszowego.

Definicja. Jeśli $\boldsymbol{f} = [f_1, \dots, f_n] \in \mathbb{K}_n$ jest wektorem wierszowym, natomiast $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$ — wektorem kolumnowym tego samego wymiaru, to ich *iloczynem* (w obligatoryjnej kolejności **wiersz** $\cdot$ **kolumna**) nazywamy liczbę

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{x} := f_1 x^1 + \dots + f_n x^n \in \mathbb{K}.$$

Jeśli $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m_{\ n}$, to wektor

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^1\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1{}_1 x^1 + \dots + A^1{}_n x^n \\ \vdots \\ A^m{}_1 x^1 + \dots + A^m{}_n x^n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_1 x^1 + \dots \boldsymbol{A}_n x^n \in \mathbb{K}^m$$

nazywa się *iloczynem* macierzy $\boldsymbol{A}$ i wektora kolumnowego $\boldsymbol{x}$. Podobnie określa się iloczyn wektora wierszowego $\boldsymbol{f} = [f_1, \ \dots, \ f_m] \in \mathbb{K}_m$ przez macierz $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{A} := [\boldsymbol{f}\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{f}\boldsymbol{A}_n] = [\textstyle\sum f_i A^i{}_1, \dots, \sum f_i A^i{}_n] = f_1 \boldsymbol{A}^1 + \dots + f_m \boldsymbol{A}^m \in \mathbb{K}_n.$$

Uogólnienie tych definicji stanowi iloczyn macierzy $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m_{\ n}$ przez macierz $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^n_{\ p}$, zdefiniowany jako macierz, której wyrazami są wszelkie możliwe iloczyny wierszy pierwszego czynnika przez kolumny drugiego czynnika:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}^1\boldsymbol{B}_2 & \dots & \boldsymbol{A}^1\boldsymbol{B}_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}_2 & \dots & \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m_{\ p}.$$

Wobec tego wyrazy macierzy $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ wyrażają się następującymi wzorami

$$C^i{}_j = \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}_j = \sum_{k=1}^n A^i{}_k B^k{}_j \,;$$

widoczne są też następujące wzory na kolumny i wiersze powyższej macierzy:

$$\boxed{\boldsymbol{C}_j = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_j \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{C}^i = \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}}.$$

Przykłady.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$$[2,\ 5] \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \end{bmatrix} = [16,\ -20,\ 13,\ 16]\ ,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 5 & 6 \\ 0 & -56 & 22 & 32 \\ 9 & 43 & -14 & -22 \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że mnożenie macierzy jest *rozdzielne względem dodawania*:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \tilde{\boldsymbol{B}}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{B}}, \qquad (\boldsymbol{A} + \tilde{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B},$$

jeśli $\boldsymbol{A}, \tilde{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{K}^m{}_n, \quad \boldsymbol{B}, \tilde{\boldsymbol{B}} \in \mathbb{K}^n{}_p$.

Fakt. Mnożenie macierzy jest *łączne*, tzn. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$, o ile wymiary macierzy dopuszczają stosowne iloczyny: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m{}_n$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^n{}_p$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{K}^p{}_q$.

Istotnie, (i,j)-wyraz $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ jest równy $\sum\limits_l \left(\sum\limits_k A^i{}_k B^k{}_l \right) C^l{}_j = \sum\limits_l \left(\sum\limits_k A^i{}_k B^k{}_l C^l{}_j \right) =$ $= \sum\limits_{k,l} A^i{}_k B^k{}_l C^l{}_j$; identyczne wyrażenie dostaje się na (i,j)-wyraz macierzy $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$, QED.

Wniosek. Dla $n \in \mathbb{N}$ zbiór *macierzy kwadratowych* $M_n(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^n{}_n$ jest pierścieniem (z jedynką) względem działań dodawania i mnożenia macierzy.

Zauważmy, że $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$, więc pierścień $M_2(\mathbb{K})$ jest nieprzemienny i ma nietrywialne dzielniki zera. To samo dotyczy pierścieni $M_n(\mathbb{K})$ dla $n > 2$, gdyż podzbiór $M_n(\mathbb{K})$, złożony z macierzy $\boldsymbol{A}$ o własności $\big(i > 2 \text{ lub } j > 2\big) \Rightarrow A^i{}_j = 0$, jest podpierścieniem $M_n(\mathbb{K})$ izomorficznym z $M_2(\mathbb{K})$.

Zastosowanie macierzy do zapisywania układu równań liniowych.

Jeśli są dane macierz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m{}_n$ oraz wektor kolumnowy $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m$, to możemy napisać następujące równanie 'wektorowe' na wektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

W postaci rozpisanej jest ono równoważne układowi m równań 'skalarnych' na 'składowe' $x^1, \ldots, x^n$ wektora $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{cases} A^1{}_1 x^1 + A^1{}_2 x^2 + \ \ldots + A^1{}_n x^n = b^1 \\ A^2{}_1 x^1 + A^2{}_2 x^2 + \ \ldots + A^2{}_n x^n = b^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^m{}_1 x^1 + A^m{}_2 x^2 + \ldots + A^m{}_n x^n = b^m \end{cases} \tag{U}$$

$\boldsymbol{A}$ nazywa się *macierzą główną* (lub *macierzą części jednorodnej*) układu (U), $\boldsymbol{b}$ — *wektorem prawych stron układu*, natomiast macierz $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$, powstała z $\boldsymbol{A}$ przez dołączenie wektora $\boldsymbol{b}$ jako dodatkowej kolumny:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] := \left[\begin{array}{ccc|c} A^1{}_1 & \ldots & A^1{}_n & b^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^m{}_1 & \ldots & A^m{}_n & b^m \end{array}\right],$$

nazywa się *macierzą rozrzerzoną* układu (U). Zauważmy, że

- równaniom układu (U) odpowiadają **wiersze** macierzy $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$;
- 'zwykłym' operacjom algebraicznym na równaniach, przekształcającym układ (U) do równoważnej postaci, np. takim, jak dodanie stronami do jednego z równań kombinacji innych równań, odpowiadają analogiczne operacje na wierszach macierzy $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ (są to, jak zobaczymy dalej, tzw. *operacje elementarne* lub złożenia takich operacji elementarnych).

Definicja (*obraz* i *jądro* macierzy). Niech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m_n$.

- Przestrzeń $\operatorname{im}\boldsymbol{A}$, rozpiętą przez kolumny $\boldsymbol{A}$, nazywa się *obrazem* (ang. *image*) macierzy $\boldsymbol{A}$:
$$\operatorname{im}\boldsymbol{A} := \langle \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n \rangle \subset \mathbb{K}^m.$$
- Przestrzeń rozwiązań równania $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ nazywa się *jądrem* (ang. *kernel*) macierzy $\boldsymbol{A}$:
$$\ker\boldsymbol{A} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0\} \subset \mathbb{K}^n.$$

0.2 Dwa sposoby opisu podprzestrzeni $V \subset \mathbb{K}^m$

Spotyka się kilka różnych postaci opisu podprzestrzeni, lecz w gruncie rzeczy są tylko dwa typy, występujące w kilku równoważnych wariantach:

I. Opis wektorami rozpinającymi II. Opis układem równań liniowych

I. Opis typu 'wektory rozpinające' (w skrócie 'opis typu W' lub 'W-opis') ma postać $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ ($\boldsymbol{v}_j \in \mathbb{K}^m$ dane); stanowi on *parametryzację* V, gdyż jak pamiętamy $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle = \{t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_r\boldsymbol{v}_r : t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{K}\}$. Wzór typu $V = \operatorname{im}\boldsymbol{A}$' także, z definicji obrazu macierzy, jest opisem typu W.

Przykład. Poniższe wzory są W-opisem pewnej podprzestrzeni w $\mathbb{K}^3$ i różnią się między sobą jedynie notacją: $V := \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle$; $V := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} t_2 : t_1, t_2 \in \mathbb{K} \right\}$;

$$V := \operatorname{im} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}; \qquad V := \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{t} : \boldsymbol{t} \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

II. Opis typu 'układ równań' (w skrócie 'opis typu R' lub 'R-opis') ma postać $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^m : \boldsymbol{\varphi}_1\boldsymbol{x} = \ldots = \boldsymbol{\varphi}_s\boldsymbol{x} = 0\}$, gdzie $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_s \in \mathbb{K}_m$ są danymi wektorami wierszowymi. Również wzór postaci $V = \ker\boldsymbol{B}$, z definicji jądra macierzy, jest opisem typu R.

Przykład. Oto cztery R-opisy pewnej podprzestrzeni $\mathbb{K}^3$, różniące się jedynie notacją: $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^3 : [2, 3, -4]\boldsymbol{x} = [1, -4, 3]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$; $V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^3 : \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$;

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^3 : \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}; \qquad V = \ker \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

0.3 Operacje elementarne na układach wektorów

Niech V będzie ustaloną przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$.

Definicja. W zbiorze $V^n = V \times \ldots \times V$ n-elementowych układów $(v_1, \ldots, v_n)$ określmy *operacje elementarne* jako operacje trzech następujących rodzajów:

1^0 Przestawienie danych wektorów:

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}), \qquad \sigma \in S_n.$$

2^0 Pomnożenie poszczególnych wektorów przez dowolne $\neq 0$ liczby $\lambda_i \in \mathbb{K}$:

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n).$$

3^0 Dodanie krotności jednego z wektorów układu (powiedzmy wektora v_j) do pozostałych wektorów układu:

$$(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \mapsto (v_1 + \alpha_1 v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n + \alpha_n v_j);$$

tutaj współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mogą być dowolne.

Fakt. Każda operacja elementarna jest odwracalna, a jej odwrotność jest operacją elementarną tego samego typu (1^0, 2^0 lub 3^0).

Gdy $(w_1, \ldots, w_n) = (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$, wtedy $(v_1, \ldots, v_n) = (w_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, w_{\sigma^{-1}(n)})$.
Gdy $(w_1, \ldots, w_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)$, wtedy $(v_1, \ldots, v_n) = (\lambda_1^{-1} w_1, \ldots, \lambda_n^{-1} w_n)$.
Wreszcie gdy $(w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + \lambda_1 v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n + \lambda_n v_j)$, wtedy
$(v_1, \ldots, v_n) = (w_1 - \lambda_1 w_j, \ldots, w_j, \ldots, w_n - \lambda_n w_j)$.

Definicja. Dwa układy $(v_1, \ldots, v_n)$ i $(w_1, \ldots, w_n)$ nazywamy *równoważnymi*, pisząc $(v_1, \ldots, v_n) \sim (w_1, \ldots, w_n)$, jeżeli układ $(w_1, \ldots, w_n)$ można otrzymać z układu $(v_1, \ldots, v_n)$ stosując pewną liczbę operacji elementarnych.

Przykład (n=3): $(v_1, v_2, v_3) \sim (9v_2 + 2v_3, 4v_3 + 3v_1, -2v_1 + 3v_2)$ gdyż

$$\begin{aligned}
(v_1, v_2, v_3) &\xmapsto{3^0} (v_1, v_2 - \tfrac{2}{3}v_1, v_3 + \tfrac{3}{4}v_1) \\
&\xmapsto{3^0} (v_1 + 2v_2 - \tfrac{4}{3}v_1, v_2 - \tfrac{2}{3}v_1, v_3 + \tfrac{3}{4}v_1) \\
&\xmapsto{3^0} (-\tfrac{1}{3}v_1 + 2v_2 + \tfrac{4}{9}(v_3 + \tfrac{3}{4}v_1), v_2 - \tfrac{2}{3}v_1, v_3 + \tfrac{3}{4}v_1) \\
&\xmapsto{2^0} (9v_2 + 2v_3, 3v_2 - 2v_1, 4v_3 + 3v_1) \\
&\xmapsto{1^0} (9v_2 + 2v_3, 4v_3 + 3v_1, -2v_1 + 3v_2).
\end{aligned}$$

Fakt. Określona powyżej relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze V^n.

Zwrotność i przechodniość są oczywiste, natomiast symetria wynika z poprzedniego faktu: Odwrotnością złożenia $E_1 \circ E_2 \circ \cdots \circ E_k$ operacji elementarnych $E_1, \dot{;} E_k$ jest złożenie $E_1^{-1} \circ E_2^{-1} \circ \cdots \circ E_k^{-1}$ (również operacji elementarnych).

Fakt. Jeśli $(v_1, \ldots, v_n) \sim (w_1, \ldots, w_n)$, to

(a) $(v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne$) \iff w_1, \ldots, w_n$ są liniowo niezależne,
(b) $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$.

Inaczej mówiąc, *liniowa (nie)zależność układu, a także przestrzeń rozpinana przez układ, są niezmiennikami operacji elementarnych.*

Charakter określenia relacji $\sim$ powoduje, że wystarczy sprawdzić (a) i (b) w przypadku, gdy układ $(w_1, \ldots, w_n)$ jest rezultatem podziałania na $(v_1, \ldots, v_n)$ jedną operacją elementarną. Dla operacji typu 1° lub 2° (a) i (b) są oczywiste, zajmijmy się więc operacją typu 3°. Niech więc, przy ustalonym $j \in \overline{1,n}$, $w_j = v_j$ oraz $w_i = v_i + \alpha_i v_j$ dla $i \in \overline{1,n} \setminus \{j\}$. Jeśli $v_1, \ldots, v_r$ są l.niezależne oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, to $w := \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n$ jest równe $\tilde{\lambda}_1 v_1 + \ldots + \tilde{\lambda}_n v_n$, gdzie $\tilde{\lambda}_j = \lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_j + \ldots + \lambda_n \alpha_n$ oraz $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ dla $i \in \overline{1,n} \setminus \{j\}$. Widać z tego, że równości $\tilde{\lambda}_1 = 0, \ldots, \tilde{\lambda}_n = 0$, będące konsekwencją $w = 0$, implikują równości $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, a więc $w_1, \ldots, w_n$ są l.niezależne, co kończy dowód (a). Powyższy rachunek pokazuje też, że każdy element $w \in \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ należy do $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, więc $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \supset \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$; to wraz z symetrią relacji $\sim$ kończy dowód (b).

Uwaga. Okazuje się, że równość przestrzeni rozpinanych przez dwa układy jest warunkiem nie tylko koniecznym, ale i dostatecznym ich równoważności:

$$(v_1, \ldots, v_n) \sim (w_1, \ldots, w_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle;$$

jest to jednak trudniejsze do wykazania, a zarazem niezbyt przydatne do celów rachunkowych, więc dowód odłożymy na później (zob. Appendix).

0.4 Operacje elementarne na kolumnach i na wierszach macierzy

W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem, gdy V jest przestrzenią $\mathbb{K}^m$ (macierzy wymiaru $m \times 1$, tzn. wektorów kolumnowych) lub $\mathbb{K}_n$ (macierzy wymiaru $1 \times n$, tzn. wektorów wierszowych); wygodnie jest wtedy układ $(v_1, \ldots, v_n)$ opisać macierzą, której kolumnami lub wierszami są wektory v_i.

Macierz $\boldsymbol{A}$ można traktować jako układ jej kolumn, tzn. układ $(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n)$, bądź jako układ wierszy $(\boldsymbol{A}^1, \ldots, \boldsymbol{A}^m)$; prowadzi to do następujących pojęć:

Definicja. Dwie macierze $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^m_n$ są:

(a) *kolumnowo równoważne*, co zapisujemy w postaci $\boldsymbol{A} \underset{K}{\sim} \boldsymbol{B}$, jeżeli

$$(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n) \sim (\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_n).$$

(b) *wierszowo równoważne*, co zapisujemy w postaci $\boldsymbol{A} \underset{W}{\sim} \boldsymbol{B}$, jeżeli

$$(\boldsymbol{A}^1, \ldots, \boldsymbol{A}^n) \sim (\boldsymbol{B}^1, \ldots, \boldsymbol{B}^n).$$

Przykład.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2-2 \\ 3 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 1-3\cdot 0 & 0 \\ 3-3\cdot 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4-2\cdot 2 & 5-2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim}$$

$$\underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 2-3\cdot 0 & 3-3\cdot 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fakt.

$$\boldsymbol{A} \underset{K}{\sim} \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{im} \boldsymbol{A} = \operatorname{im} \boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{A} \underset{W}{\sim} \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \ker \boldsymbol{A} = \ker \boldsymbol{B}.$$

Wynika to natychmiast z punktu (b) poprzedniego Faktu.

Okazuje się, że w wielu sytuacjach szczególnie wygodne są tzw. *macierze* *zredukowane* (kolumnowo lub wierszowo) i, co więcej, że z każdej macierzy $\boldsymbol{A}$ można, stosując operacje elementarne na jej kolumnach (wierszach) otrzymać równoważną jej macierz kolumnowo (wierszowo) zredukowaną.

0.5 Macierze zredukowane

Definicja. *Samotnikiem wierszowym* macierzy nazwijmy taki jej wyraz, który jest jedynym $\neq 0$ elementem zawierającego go wiersza; analogicznie określmy *samotniki kolumnowe* macierzy.

Tak więc np. macierz $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ma dwa samotniki wierszowe: $A^2{}_1 = 3$ i $A^3{}_3 = 4$, oraz dwa samotniki kolumnowe: $A^1{}_2 = 1$ i $A^2{}_1 = 3$.

Fakt. Układ złożony z takich kolumn macierzy $\boldsymbol{A}$, które zawierają samotniki wierszowe, jest liniowo niezależny. Podobnie, układ złożony z takich wierszy macierzy $\boldsymbol{A}$, które zawierają samotniki kolumnowe, jest liniowo niezależny.

Niech kolumna $\boldsymbol{A}_{j_1}$ ma samotnika wierszowego $c_1 := A^{i_1}{}_{j_1}$, $\boldsymbol{A}_{j_2}$ — samotnika wierszowego $c_2 := A^{i_2}{}_{j_2}$, itd. Wtedy komb. liniowa $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{A}_{j_1} + \lambda_2 \boldsymbol{A}_{j_2} + \ldots$ ma współrzędne o numerach $i_1, i_2, \ldots$ równe $\lambda_1 c_1, \lambda_2 c_2, \ldots$, więc skoro $c_k \neq 0$, to $\boldsymbol{v} = 0$ implikuje $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots$.

Definicja. *Macierzą kolumnowo zredukowaną* (w skrócie: KZ-macierzą) nazywamy taką macierz, której każda niezerowa kolumna ma samotnika wierszowego. Podobnie, *macierz wierszowo zredukowana* (WZ-macierz) jest taką macierzą, której każdy niezerowy wiersz ma samotnika kolumnowego.

Przykład. Po zastąpieniu znaków '?' dowolnymi liczbami, a znaków '$\star$' — liczbami $\neq 0$, poniższa macierz $\boldsymbol{M}$ stanie się KZ-macierzą, natomiast macierz $\boldsymbol{N}$ — WZ-macierzą:

$$\boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star \\ ? & ? & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & ? & 0 & ? \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{N} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & ? & \star & 0 & ? & 0 & ? \\ ? & 0 & ? & 0 & \star & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & \star & ? & 0 & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & ? & 0 & 0 & ? & \star & ? \end{bmatrix}.$$

Oczywistą konsekwencją poprzedniego faktu jest

Fakt. (1) Niezerowe kolumny KZ–macierzy są liniowo niezależne.
(2) Niezerowe wiersze WZ–macierzy są liniowo niezależne.

Macierze zredukowane można także opisać w inny sposób, używając pojęcia *macierzy permutacyjnej* (w skrócie: P-macierzy). P-*macierzą* nazywać będziemy macierz, mającą zarówno w każdym wierszu, jak i w każdej kolumnie, dokładnie jeden wyraz różny od 0; jasne, że taka macierz musi być kwadratowa (tzn. mieć tyle wierszy, co kolumn). Przykładami P-macierzy są:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podmacierzą macierzy $\boldsymbol{A}$ nazywamy macierz, otrzymaną przez (ewentualne) wykreślenie z $\boldsymbol{A}$ pewnych wierszy i/lub kolumn. Na przykład $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ zawiera następujące podmacierze wymiaru 2×2:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$

Łatwo teraz przekonać się, że zachodzi następujący

Fakt. Macierz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m_n$ jest KZ-macierzą $\iff$ zawiera pewną podmacierz, będącą P-macierzą wymiaru $r \times r$, gdzie $r =$ (liczba $\neq 0$-kolumn $\boldsymbol{A}$). Analogicznie jest dla WZ-macierzy: tym razem $r =$ (liczba $\neq 0$-wierszy $\boldsymbol{A}$).

Przykład. Powyższe macierze $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{N}$ zawierają następujące podmacierze permutacyjne:

$$\text{dla } \boldsymbol{M}: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & \star & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{dla } \boldsymbol{N}: \begin{bmatrix} 0 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{bmatrix};$$

przy tym $\boldsymbol{M}$ ma 4 niezerowe kolumny, $\boldsymbol{N}$ — 4 niezerowe wiersze, więc $\boldsymbol{M}$ jest KZ-macierzą, a $\boldsymbol{N}$ — WZ-macierzą. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest KZ-macierzą, gdyż ma P-podmacierz $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, zaś $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest WZ-macierzą, gdyż ma P-podmacierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Definicja. Ustalmy wskaźniki i, j, dla których $A^i{}_j$ jest niezerowym wyrazem macierzy $\boldsymbol{A}$. Operacja elementarna (typu 3°, na kolumnach), określona jako

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{dodanie takich krotności kolumny } \boldsymbol{A}_j \text{ do pozostałych} \\ \text{kolumn, żeby wyraz } A^i{}_j \text{ stał się samotnikiem wierszowym}\end{array}}$$

nazywa się *redukcją kolumnową względem wyrazu* $A^i{}_j$, zwanego *wyrazem bazowym* dla tej operacji.

Definicja *redukcji wierszowej względem wyrazu bazowego* $A^i{}_j$ jest analogiczna:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{dodanie takich krotności wiersza } \boldsymbol{A}^i \text{ do pozostałych} \\ \text{wierszy, żeby wyraz } A^i{}_j \text{ stał się samotnikiem kolumnowym}\end{array}}.$$

Przykład[3]. Dla $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \boxed{1} & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ i wyrazu bazowego $A^2{}_1 = 1$ redukcja kolumnowa wyprodukuje z macierzy $\boldsymbol{A}$ macierz $\begin{bmatrix} 2 & 3-2\cdot 2 & 4-5\cdot 2 \\ 1 & 2-2\cdot 1 & 5-5\cdot 1 \\ 3 & 5-2\cdot 3 & 6-5\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -9 \end{bmatrix}$, redukcja wierszowa zaś — macierz $\begin{bmatrix} 2-2\cdot 1 & 3-2\cdot 2 & 4-2\cdot 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3-3\cdot 1 & 5-3\cdot 2 & 6-3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -9 \end{bmatrix}$.

Zgodnie z definicją w redukcji kolumnowej zastępuje się każdą kolumnę $\boldsymbol{A}_k$, dla $k \neq j$, wektorem $\boldsymbol{A}_k + \alpha_k \boldsymbol{A}_j$, ze współczynnikiem α_k wyznaczonym z

[3] Wybrany wyraz bazowy macierzy będziemy w dalszym ciągu wyróżniać ramką $\boxed{\cdot}$.

warunku $0 = (i\text{-ta współrzędna } \boldsymbol{A}_k + \alpha_k \boldsymbol{A}_j) = A^i{}_k + \alpha_k A^i{}_j$, tzn. $\alpha_k = -\frac{A^i{}_k}{A^i{}_j}$. Wygodnie jest zapamiętać ten rezultat w formie następującego schematu:

$$\begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \boxed{a} & \cdots & b & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & c & \cdots & d & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & c & \cdots & d-\frac{bc}{a} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}}_{\text{dla redukcji kolumnowej}} \text{ lub } \underbrace{\begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots & b & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & d-\frac{bc}{a} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}}_{\text{dla redukcji wierszowej}};$$

wymaga on oczywistej modyfikacji, gdy wyraz bazowy leży w innym 'rogu'.

Algorytm Redukcji Kolumnowych

Polega on na przeprowadzaniu redukcji kolumnowych względem kolejnych wyrazów bazowych, wybieranych zgodnie z dwiema następującymi zasadami:

(K) nie mogą się powtarzać numery kolumn wyrazów bazowych;
(W) nie mogą się powtarzać numery wierszy wyrazów bazowych.

Przestrzegając zasady (K) nie da się naruszyć zasady (W) ([4]), więc można by opuścić (W), jako konsekwencję (K); jednak powyższa symetryczna postać 'wytycznych' jest łatwiejsza do zapamiętania i poręczniejsza w użyciu. Uzupełniającą (już nie obligatoryjną) zasadą jest wybór takich wyrazów bazowych, przez które 'łatwo' jest dzielić.

Każda redukcja kolumnowa sprawia, że jej wyraz bazowy staje się samotnikiem wierszowym, a przy tym samotniki z innych (np. wcześniej wybranych) kolumn pozostaną samotnikami. Wobec tego po zakończeniu procedury, gdy nie jest już możliwy wybór nowego wyrazu bazowego, każda niezerowa kolumna ma samotnika wierszowego, czyli otrzymana macierz jest KZ-macierzą.

Algorytm Redukcji Wierszowych różni się od powyższego jedynie tym, że redukcje kolumnowe należy zastąpić redukcjami wierszowymi.

Z powyższych rozważań wynika natychmiast następujące

Twierdzenie. Z dowolnej macierzy $\boldsymbol{A}$ można otrzymać, stosując operacje elementarne typu 3^0 na kolumnach, równoważną jej kolumnowo KZ-macierz. Analogicznie, każda macierz jest wierszowo równoważna pewnej WZ-macierzy.

Przykład.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 6 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -2 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & -4 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -10 & -7 & 10 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -10 & 13 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 6 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -2 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 10 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obie końcowe macierze są zredukowane (kolumnowo w 1., a wierszowo w 2. przypadku).

[4] Wiersz, 'użyty' już poprzednio, ma $\neq 0$ wyraz jedynie w 'użytej' poprzednio kolumnie.

0.6 Zastosowanie operacji elementarnych do podstawowych zadań numerycznych algebry wektorowej

Omówimy teraz kolejno następujące zagadnienia:

1. Uproszczenie opisu typu W. Obliczanie wymiaru im $\boldsymbol{A}$. Badanie liniowej niezależności danych wektorów z $\mathbb{K}^m$

1*. Uproszczenie opisu typu R. Obliczanie wymiaru ker $\boldsymbol{B}$. Badanie liniowej niezależności danych równań, tzn. wektorów z $\mathbb{K}_n$

2. Przejście od opisu typu R do opisu typu W, czyli Rozwiązywanie jednorodnego układu równań liniowych

2*. Przejście od opisu typu W do opisu typu R, czyli Znajdowanie zupełnego układu równań liniowych spełnianych przez dane wektory

3. Rozwiązywanie układu równań liniowych niejednorodnych
4. Odwracanie macierzy kwadratowej
5. Znajdowanie przecięcia $V_1 \cap V_2$ dwóch podprzestrzeni
6. Znajdowanie sumy algebraicznej $V_1 + V_2$ dwóch podprzestrzeni

1. Uproszczenie opisu typu W. Obliczanie wymiaru $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$**. Badanie liniowej niezależności danych wektorów z** $\mathbb{K}^m$.

Ponieważ $\boldsymbol{A}' \underset{K}{\sim} \boldsymbol{A} \;\Rightarrow\; \operatorname{im} \boldsymbol{A} = \operatorname{im} \boldsymbol{A}'$, więc w opisie $V = \operatorname{im} \boldsymbol{A}$ możemy $\boldsymbol{A}$ zastąpić KZ-macierzą $\boldsymbol{A}'$, otrzymaną z $\boldsymbol{A}$ przez zastosowanie algorytmu redukcji kolumnowych; zatem $\dim V$ jest liczbą $\neq 0$-kolumn $\boldsymbol{A}'$ oraz $V = \operatorname{im} \boldsymbol{A}''$, gdzie $\boldsymbol{A}''$ jest rezultatem usunięcia z $\boldsymbol{A}'$ ewentualnych kolumn zerowych.

Przykład 1. Niech $V = \left\langle \begin{bmatrix} 7\\4\\0\\5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3\\2\\2\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\2\\10\\-5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\-1\\-7\\4 \end{bmatrix} \right\rangle$; wtedy $V = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 7&3&1&0\\4&2&2&-1\\0&2&10&-7\\5&1&-5&4 \end{bmatrix}$, zaś $\begin{bmatrix} 7&3&\boxed{1}&0\\4&2&2&-1\\0&2&10&-7\\5&1&-5&4 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\-10&-4&2&\boxed{-1}\\-70&-28&10&-7\\40&16&-5&4 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&-4&-7\\0&0&3&4 \end{bmatrix}$; stąd $V = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1&0\\0&-1\\-4&-7\\3&4 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1\\0\\-4\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\-1\\-7\\4 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim V = 2$, więc cztery wektory z początkowego opisu V są lin. zależne.

Przykład 2. Dla $V = \left\langle \begin{bmatrix} 4\\3\\1\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\2\\4\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\4\\3\\1 \end{bmatrix} \right\rangle$ mamy $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4&\boxed{1}&2\\3&2&4\\1&4&3\\2&3&1 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 0&1&0\\-5&2&0\\-15&4&-5\\-10&3&-5 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 0&1&0\\\boxed{1}&2&0\\3&4&1\\2&3&1 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\3&-2&1\\2&-1&\boxed{1} \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\\0&0&1 \end{bmatrix}$; ostatnia macierz jest KZ, więc jej kolumny (niezerowe!) są l.niezależne; stąd $\dim V = 3$ i wektory $\begin{bmatrix} 4\\3\\1\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\2\\4\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\4\\3\\1 \end{bmatrix}$ też są l.niezależne.

1^*. Uproszczenie opisu typu R. Obliczanie wymiaru $\ker \boldsymbol{B}$. Badanie liniowej niezależności danych równań, tzn. wektorów z $\mathbb{K}_n$

Ponieważ $\boldsymbol{B} \underset{W}{\sim} \boldsymbol{B}' \Rightarrow \ker \boldsymbol{B}' = \ker \boldsymbol{B}$, więc w opisie $V = \ker \boldsymbol{B}$ możemy $\boldsymbol{B}$ zastąpić WZ-macierzą $\boldsymbol{B}'$, otrzymaną z $\boldsymbol{B}$ przez zastosowanie algorytmu redukcji wierszowych; wynika stąd([5]), że $\dim V = m - r$, gdzie r jest liczbą niezerowych wierszy $\boldsymbol{B}'$ (jak poprzednio, $V \subset \mathbb{K}^m$, tzn. m jest liczbą 'niewiadomych', tzn. liczbą kolumn $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B}'$); ponadto $V = \ker \boldsymbol{B}''$, gdzie $\boldsymbol{B}''$ jest rezultatem opuszczenia w $\boldsymbol{B}'$ ewentualnych wierszy zerowych.

Przykład 3. Jeśli $V \subset \mathbb{K}^4$ jest zdefiniowana jako przestrzeń rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + 10x_3 - 7x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases} \tag{U}$$

to $V = \ker \boldsymbol{B}$, gdzie

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 10 & -7 \\ 5 & \boxed{1} & -5 & 4 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} -8 & 0 & 16 & -12 \\ \boxed{-6} & 0 & 12 & -9 \\ -10 & 0 & 20 & -15 \\ 5 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & -7 \end{bmatrix},$$

więc $V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^4 : \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 10x_3 - 7x_4 = 0 \end{array} \right\} = \ker \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & -7 \end{bmatrix}$; ostatnia macierz jest WZ, więc jej wiersze (niezerowe) są liniowo niezależne, skąd $\dim V = 4 - 2 = 2$.

2. Przejście od opisu typu R do opisu typu W

czyli

Rozwiązywanie jednorodnego układu równań liniowych

Po uproszczeniu zgodnie z punktem 1^* dostajemy opis $V = \ker \boldsymbol{C}$, gdzie $\boldsymbol{C}$ jest WZ-macierzą (bez zerowych wierszy). Niech $K \subset \overline{1,m}$ będzie zbiorem numerów kolumn jakiejś maksymalnej P-podmacierzy $\boldsymbol{C}$([6]). Wtedy układ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ można przepisać w postaci

$$x_k = \sum_{j \notin K} D^k{}_j x_j \text{ dla } k \in K \tag{*}$$

(mianowicie $D^k{}_j = -\frac{C^i{}_j}{C^i{}_k}$, gdzie $C^i{}_k =$ jedyny niezerowy wyraz k-kolumny), więc jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$(x_j)_{j \notin K} \text{ — dowolne z } \mathbb{K},\ (x_k)_{k \in K} \text{ — określone wzorami } (*).$$

Zauważmy teraz, że jeśli zastąpimy w wektorze $\boldsymbol{x}$ współrzędne x_k, $k \in K$, wyrażeniami $\sum_{j \notin K} D^k{}_j x_j$, to otrzymamy przedstawienie postaci $\boldsymbol{x} = \sum_{j \notin K} x_j \boldsymbol{v}_j$; zatem *tak znalezione wektory $\boldsymbol{v}_j$ tworzą bazę V*, czyli dają jej W-opis([7]).

Przykład 4. Dla V z przykładu 3. dostaliśmy $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & -7 \end{bmatrix}$, więc $K = \{1, 2\}$ oraz

[5] Np. przez przejście od opisu typu R do opisu typu W, patrz dalej punkt 2.

[6] K można uzyskać jako zbiór numerów kolumn zestawu samotników kolumnowych, wybranych po jednym z każdego wiersza macierzy $\boldsymbol{C}$.

[7] Wektory $\boldsymbol{v}_j$ są liniowo niezależne, gdyż $\boldsymbol{x}$ zależy injektywnie od zestawu $(x_j)_{j \in \overline{1,m} \setminus K}$.

$$V=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^4:\ \begin{matrix} x_1 = & 2x_3 & -\frac{3}{2}x_4 \\ x_2 = & -5x_3 & +\frac{7}{2}x_4\end{matrix}\right\}=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2x_3-\frac{3}{2}x_4\\ -5x_3+\frac{7}{2}x_4\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}:\ x_3,x_4\in\mathbb{K}\right\}=$$

$$=\left\{\boldsymbol{x}=x_3\begin{bmatrix}2\\-5\\1\\0\end{bmatrix}+\tfrac{1}{2}x_4\begin{bmatrix}-3\\7\\0\\2\end{bmatrix}:\ x_3,x_4\in\mathbb{K}=\left\langle\begin{bmatrix}2\\-5\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\7\\0\\2\end{bmatrix}\right\rangle=\operatorname{im}\begin{bmatrix}2&-3\\-5&7\\1&0\\0&1\end{bmatrix}.\right.$$

Jest to W-opis przestrzeni V rozwiązań układu (U); tym samym rozwiązaliśmy układ (U).

Warto zauważyć, że znaleziony W-opis V jest maksymalnie uproszczony, tzn. odpowiada macierzy KZ; nietrudno dowieść, że jest tak zawsze przy stosowaniu powyższej procedury.

Uwaga. Oczywiście $\boldsymbol{v}_j$ można znaleźć jako takie rozwiązanie $\boldsymbol{x}$ układu $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ (lub (*)), w którym są zerami wszystkie współrzędne o indeksach z $\overline{1,m}\setminus K$, oprócz $x_j=1$.

2*. Przejście od opisu typu W do opisu typu R

czyli

Znajdowanie zupełnego układu równań liniowych spełnianych przez dane wektory

Po uproszczeniu (punkt 1.) dostajemy opis $V=\operatorname{im}\boldsymbol{C}$, gdzie $\boldsymbol{C}\in\mathbb{K}^m{}_n$ jest KZ-macierzą (bez zerowych kolumn). Część zależności $x_i=\sum_j C^i{}_j u_j$, odpowiadających rozkładowi $\boldsymbol{x}=\sum_j \boldsymbol{C}_j u_j$, ma nader prostą postać $x_{k_j}=c_j u_j$; tych prostych zależności wystarcza do wyrażenia *wszystkich* u_j (samotniki wierszowe!) przez współrzędne $\boldsymbol{x}$. Wstawiając teraz $u_j=\frac{1}{c_j}x_j$ do *pozostałych* (tzn. dla i spoza zbioru $K=\{k_1,\dots,k_n\}$) zależności $x_i=\sum_j C^i{}_j u_j$ dostajemy równania na $\boldsymbol{x}$, równoważne oczywiście warunkowi $\boldsymbol{x}\in\operatorname{im}\mathbb{C}$.

Przykład 5. W przykładzie 1. dostaliśmy $\boldsymbol{x}\in V\ \Leftrightarrow\ \exists u_1,u_2:\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\-4\\3\end{bmatrix}u_1+\begin{bmatrix}0\\-1\\-7\\4\end{bmatrix}u_2;$

zatem $\begin{cases}x_1=u_1,\\ x_2=-u_2;\end{cases}$ wstawiając $\begin{cases}u_1=x_1,\\ u_2=-x_2\end{cases}$ do pozostałych zależności $\begin{cases}x_3=-4u_1-7u_2,\\ x_4=3u_1+4u_2\end{cases}$ dostajemy $\begin{cases}x_3=-4x_1+7x_2,\\ x_4=3x_1-4x_2.\end{cases}$ Zatem

$$V=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^4:\ \begin{matrix}4x_1-7x_2+x_3=0\\ 3x_1-4x_2-x_4=0\end{matrix}\right\}=\ker\begin{bmatrix}4&-7&1&0\\3&-4&0&-1\end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że uzyskany w ten sposób opis $V=\ker\boldsymbol{B}$ ma postać możliwie najwygodniejszą: $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&-7&1&0\\3&-4&0&-1\end{bmatrix}$ jest WZ-macierzą. Łatwo uzasadnić, że jest to ogólna prawidłowość.

3. Rozwiązywanie układu równań liniowych niejednorodnych.

Postępowanie polega na przeprowadzeniu algorytmu redukcji wierszowych([8]) dla macierzy rozszerzonej układu, przy czym w każdym kroku bazowe wyrazy należy wybierać jedynie z części głównej tej macierzy([9]).

[8]Gdyż operacje na wierszach są w istocie operacjami na równaniach układu, takimi jak np. dodawanie równań stronami czy ich odejmowanie.

[9]Gdyż celem jest wyrażenie niewiadomych poprzez prawe strony, a nie na odwrót.

Przykład 6. $\left\{\begin{aligned} 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 15x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$, tzn. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 15 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & 10 & 6 & 15 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 0 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right],$$

czyli $\left\{\begin{aligned} x_1 &= -1 + x_4 \\ x_2 &= 3 + x_4, \\ x_3 &= -4 - 5x_4. \end{aligned}\right.$ Zatem rozwiązaniem ogólnym jest $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Przykład 7. Rozwiążmy dwa układy, różniące się jedynie prawymi stronami:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Będziemy oba układy rozwiązywać równocześnie:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 1 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 2 & -8 \\ 2 & \boxed{1} & -3 & 3 & 5 \end{array}\right] \underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cc} 11 & 0 & -11 & 13 & 22 \\ -9 & 0 & \boxed{9} & -4 & -18 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right] \underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & \frac{73}{9} & 0 \\ -9 & 0 & 9 & -4 & -18 \\ -1 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right].$$

Odpowiedź. (a) Układ sprzeczny. (b) $\left\{\begin{aligned} x_2 &= -1 + x_1 \\ x_3 &= -2 + x_1 \end{aligned}\right.$, tzn. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

4. Odwracanie macierzy kwadratowej.

Jak wiemy $(\boldsymbol{AB})_j = \boldsymbol{AB}_j$, tzn. j-tą kolumną iloczynu $\boldsymbol{AB}$ jest iloczyn macierzy $\boldsymbol{A}$ przez j-tą kolumnę $\boldsymbol{B}_j$ macierzy $\boldsymbol{B}$. Stosując ten wzór do przypadku, gdy $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^n_n$ i $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$, tzn. gdy $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, widzimy, że wtedy

$$\boldsymbol{AB}_j = \begin{pmatrix} j\text{-ta kolumna} \\ \text{macierzy } \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} j\text{-ty wektor bazy standardowej} \\ \text{(zerojedynkowej) w } \mathbb{K}^n \end{pmatrix},$$

a więc poszczególne kolumny $\boldsymbol{B}_j$ szukanej macierzy $\boldsymbol{B}$ można znaleźć jako rozwiązania $\boldsymbol{x}$ układów równań $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{e}_j$. Ponieważ te układy różnią się jedynie prawymi stronami, więc wygodnie jest tu (tak jak w przykładzie 7) zastosować metodę 'kolektywnego' rozwiązywania takich układów.

Przykład 8. Dla znalezienia odwrotności $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ postępujemy następująco:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & \boxed{1} & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -17 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{W}{\sim}$$

$$\underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 29 & 3 & -17 \\ -1 & 0 & 0 & 12 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{W}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -12 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 29 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right], \text{ a więc } \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & -1 & 7 \\ 29 & 3 & -17 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zwykle bardziej 'poręczny' bywa alternatywny ('wertykalny') wariant powyższej metody, w którym role wierszy i kolumn są odwrócone.

Przykład 9. Rezultat $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ można otrzymać następująco:

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ \boxed{1} & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{K}{\sim} \left[\begin{array}{ccc} 2 & \boxed{-1} & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{K}{\sim} \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{K}{\sim} \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{K}{\sim} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 7 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Nietrudno sprawdzić, że $\big($macierz kwadratowa $\boldsymbol{A}$ ma odwrotność $\big) \iff \boldsymbol{A} \underset{K}{\sim} \boldsymbol{I}_n$, a więc $\big(\boldsymbol{A}^{-1}$ nie istnieje $\big) \iff \big($algorytm redukcji kolumnowych daje macierz z zerową kolumną$\big)$.

A oto jeszcze inne uzasadnienie powyższej metody znajdowania odwrotności:

Zauważmy, że każdą operację elementarną na kolumnach macierzy $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m{}_n$ można opisać wzorem $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$, gdzie $\boldsymbol{E} \in \mathbb{K}^n{}_n$ jest pewną macierzą, odpowiadającą danej operacji (tzw. *macierzą elementarną*([10])). Na przykład

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(przestawienie 1. i 2. kolumny)}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 & \lambda_3 a_3 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 & \lambda_3 b_3 \\ \lambda_1 c_1 & \lambda_2 c_2 & \lambda_3 c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} \text{pomnożenie kolumn} \\ \text{przez liczby } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_1 & a_2 + \mu_2 a_1 & a_3 + \mu_3 a_1 \\ b_1 & b_2 + \mu_2 b_1 & b_3 + \mu_3 b_1 \\ c_1 & c_2 + \mu_2 c_1 & c_3 + \mu_3 c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} \text{dodanie krotn.} \\ \boldsymbol{A}_1 \text{ do } \boldsymbol{A}_2 \text{ i } \boldsymbol{A}_3 \end{matrix}\right)$$

Z tego spostrzeżenia wynika, że jeśli jakiś ciąg $E_1, \ldots, E_r$ elementarnych operacji na kolumnach prowadzi od macierzy $\boldsymbol{A}$ do macierzy jednostkowej, to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1 \ldots \boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{I}_n$; wtedy (mnożąc obie strony przez $\boldsymbol{A}^{-1}$) dostajemy równość $\boldsymbol{I}_n \boldsymbol{E}_1 \ldots \boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{A}^{-1}$, która pokazuje, że ten sam ciąg operacji elementarnych prowadzi od macierzy $\boldsymbol{I}_n$ do macierzy $\boldsymbol{A}^{-1}$, QED.

5. Znajdowanie przecięcia $V_1 \cap V_2$ dwóch podprzestrzeni

Gdy dla V_1 znajdziemy opis typu W: $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$, a dla V_2 — opis typu R, wówczas przecięcie $V_1 \cap V_2$ składa się z tych $\boldsymbol{v} = \sum\limits_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, których współczynniki λ_i spełniają równanie indukowane z równań opisujących V_2.

Przykład 10. Niech $V_1 = \ker \begin{bmatrix} 5 & 1 & -8 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; stosując procedurę 2. dostajemy opis $V_1 = \operatorname{im} \boldsymbol{A}$, gdzie $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -5 \end{bmatrix}$. Przy tym wektor

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \in V_1 \text{ spełnia równanie opisujące } V_2$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 6 \\ 12 & -16 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$, czyli

$3\lambda_1 - 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$, tzn. $\lambda_3 = -\lambda_1 + \frac{4}{3}\lambda_2$, tzn. $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \frac{1}{3}\lambda_2 \end{bmatrix}$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

[10]Macierz $\boldsymbol{E}$ jest oczywiście rezultatem podziałania daną operacją na macierz $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$.

Odpowiedź. $V_1 \cap V_2 = \operatorname{im}\left(\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

6. Znajdowanie sumy algebraicznej $V_1 + V_2$ dwóch podprzestrzeni

Jest to metoda 'dwoista' do poprzedniej: Tak jak w 5. znajdujemy dla jednej z podprzestrzeni (powiedzmy V_1) W-opis, a dla drugiej (dla V_2) — R-opis; następnie znajdujemy takie kombinacje liniowe równań opisujących V_2, które zerują wszystkie generatory V_1. Tak otrzymane równania opisują $V_1 + V_2$.

Przykład 11. Dla V_1 i V_2 z przykładu 10. kombinacja liniowa o współczynnikach λ_1, λ_2 równań opisujących V_1 ma postać $\boldsymbol{f} = [\lambda_1,\ \lambda_2]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; takie $\boldsymbol{f}$ będzie zerować generatory V_1 (czyli kolumny $\boldsymbol{A}$) $\iff 0 = \boldsymbol{f}\boldsymbol{A} = [\lambda_1,\ \lambda_2]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{A} =$
$= [\lambda_1,\ \lambda_2]\begin{bmatrix} 6 & -8 & 6 \\ 12 & -16 & 6 \end{bmatrix} = [6\lambda_1 + 12\lambda_2,\ -8\lambda_1 - 16\lambda_2,\ 6\lambda_1 + 12\lambda_2]$, tzn. $\lambda_1 = -2\lambda_2$, czyli $[\lambda_1,\ \lambda_2] = \lambda[-2,\ 1]$, gdzie $\lambda \in \mathbb{K}$ dowolne.

Odpowiedź. $V_1 + V_2 = \ker\left([\,-2,\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \ker[2,\ 1,\ -3,\ 2,\ -1]$.

Uwaga. Alternatywne sposoby dla (5) i (6), polegające na 'połączeniu' obu zestawów równań (dla $V_1 \cap V_2$) lub generatorów (dla $V_1 + V_2$) opisujących V_1 i V_2, a następnie dokonaniu ich redukcji, są na ogół bardziej pracochłonne!

0.7 Appendix: Baza standardowa podprzestrzeni $\mathbb{K}^m$

Definicja. Niech $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ będzie bazą standardową $\mathbb{K}^m$. *Stopniem* wektora $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{e}_1 v^i \in \mathbb{K}^m$ nazwijmy liczbę $\deg \boldsymbol{v} := \max\{i \in \overline{1,m} :\ v^i \neq 0\}$; dodatkowo przyjmijmy $\deg \boldsymbol{v} = 0$ dla $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Bazę $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ podprzestrzeni $\{\boldsymbol{0}\} \neq W \subset \mathbb{K}^m$ będziemy nazywać *bazą standardową* W, jeżeli:

(a) stopnie $d_i = \deg \boldsymbol{v}_i$ spełniają nierówności $d_1 < \ldots < d_r$;
(b) $v_j^{d_i} = \delta_j^i$ dla $i, j \in \overline{1,r}$.

Fakt 1. Każda podprzestrzeń $\{\boldsymbol{0}\} \neq W \subset \mathbb{K}^m$ ma, i to dokładnie jedną, bazę standardową.

Indukcja względem $r = \dim W$: Dla $r = 1$ teza jest trywialna. Załóżmy, że $\dim W = r > 1$ i że twierdzenie jest prawdziwe dla wymiaru $r - 1$. Niech $d_1 = \min\{\deg \boldsymbol{v} :\ 0 \neq \boldsymbol{v} \in W\}$. Jasne, że istnieje dokładnie jeden $\boldsymbol{w} \in W$ taki, że $\deg \boldsymbol{w} = d_1$ oraz $w^{d_1} = 1$; przy tym W jest sumą prostą $\langle \boldsymbol{w} \rangle$ i $\widetilde{W} := \{\boldsymbol{v} \in W :\ v^{d_1} = 0\}$, gdyż dla $\boldsymbol{v} \in W$ mamy $\boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{w} \in \widetilde{W} \Leftrightarrow \lambda = v^{d_1}$. Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz zauważyć, że

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \text{ jest bazą standard. } W) \Leftrightarrow (\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w} \text{ oraz } \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \text{ jest bazą standard. } \widetilde{W}).$$

Przykład. Każda 3-wymiarowa podprzestrzeń $W \subset \mathbb{K}^4$ ma dokładnie jedną z czterech poniższych postaci (i zależy od co najwyżej trzech parametrów $a, b, c \in \mathbb{K}$):

$W = \ker[1, a, b, c]$; bazą standardową W, mającą stopnie 2,3,4, są kolumny $\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$W = \ker[0, 1, b, c]$; bazą standardową W, mającą stopnie 1,3,4, są kolumny $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$W = \ker[0, 0, 1, c]$; bazą standardową W, mającą stopnie 1,2,4, są kolumny $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$W = \ker[0, 0, 0, 1]$; bazą standardową W, mającą stopnie 1,2,3, są kolumny $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Fakt 2. Niech $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in \mathbb{K}^m$ będzie bazą standardową podprzestrzeni $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$, gdzie $0 \neq \boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m_n$. Wówczas

$$\boldsymbol{A} \underset{K}{\sim} [\underbrace{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}}_{n-r}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r].$$

Startując z $\boldsymbol{A}$ przeprowadzajmy kolejne redukcje kolumnowe przestrzegając dwóch zasad:

(K) nie mogą się powtarzać numery kolumn kolejnych wyrazów bazowych;
(W*) każdy kolejny wyraz bazowy wybieramy z wiersza o numerze maksymalnym, jaki możliwy jest przy spełnieniu warunku (W).

[Wtedy spełnione są *a fortiori* zasady (K) i (W) z algorytmu redukcji kolumnowych]. Łatwo spostrzec, że po zakończeniu tej procedury ostatnie $\neq 0$ wyrazy kolumn otrzymanej macierzy są samotnikami wierszowymi; zatem po stosownym przestawieniu jej kolumn (operacja elementarna typu 1^0) i ich unormowaniu (operacja elementarna typu 2^0) uzyskamy macierz, której niezerowe kolumny tworzą bazę standardową podprzestrzeni $\operatorname{im} \boldsymbol{A}$.

Przykład. Dla $W := \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ rachunek $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & \boxed{2} \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & 5 \\ -4 & 4 \\ \boxed{\frac{1}{2}} & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & 44 \\ -4 & 28 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} -13 & 22 \\ -8 & 14 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pokazuje, że bazą standardową jest zestaw kolumn ostatniej macierzy. To samo dostaniemy wybierając w pierwszym kroku $\boxed{3}$ zamiast $\boxed{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ \boxed{3} & 2 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{3} \\ 2 & \frac{8}{3} \\ 5 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -13 \\ 2 & -8 \\ 5 & \boxed{1} \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} 66 & -13 \\ 42 & -8 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{bmatrix} -13 & 22 \\ -8 & 14 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wniosek 1. Niech W będzie przestrzenią wektorową oraz niech $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i \in V$ dla $i \in \overline{1, n}$. Wówczas (por. Uwagę ze strony 6)

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle \ \Rightarrow \ (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \sim (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n).$$

Możemy zakładać, że $V = \mathbb{K}^m$; niech $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ będzie bazą standardową podprzestrzeni $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle$. Wtedy Fakt 2. daje $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] \underset{K}{\sim} [\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r]$ oraz $[\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n] \underset{K}{\sim} [\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r]$, skąd natychmiast wynika teza.

Wniosek 2. Gdy $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^m_n$, wtedy

$$\operatorname{rk} \boldsymbol{A} = m \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A} \underset{K}{\sim} [\mathbf{0},\; \boldsymbol{I}_m] \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{rk} \boldsymbol{A} = n \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A} \underset{W}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

W szczególności jeśli macierz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^n_n$ jest nieosobliwa, to $\boldsymbol{A} \underset{K}{\sim} \boldsymbol{I}_n$ i $\boldsymbol{A} \underset{W}{\sim} \boldsymbol{I}_n$.

Wniosek 3. Każda klasa równoważności relacji $\underset{K}{\sim}$ w $\mathbb{K}^m_n$ zawiera dokładnie jedną macierz postaci $[\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r]$, gdzie $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ jest układem niezerowych wektorów w $\mathbb{K}^m$, spełniających powyższe warunki (a) i (b).

Macierz powyższej postaci nazywana jest *macierzą zredukowaną kolumnowo do postaci trójkątnej*, w skrócie KZT-*macierzą*; postać tę można w pełni scharakteryzować następującymi warunkami, które są oczywiście mocniejsze od warunków definiujących KZ-macierz:

(1) kolumny macierzy są ustawione w kolejności rosnących stopni;

(2) w każdej $\neq 0$ kolumnie ostatni $\neq 0$ wyraz jest jedynką i samotnikiem wierszowym.

Wniosek 4. Grassmannian $G_r(\mathbb{K}^m)$ (którego elementami są r-wymiarowe podprzestrzenie $W \subset \mathbb{K}^m$, $r \leqslant m$) ma rozkład komórkowy $\bigcup K(d_1, \ldots, d_r)$, gdzie

$$1 \leqslant d_1 < \ldots < d_r \leqslant m,$$

$$K(d_1, \ldots, d_r) := \{W \subset \mathbb{K}^m : \text{baza standardowa } W \text{ ma stopnie } d_1, \ldots, d_r\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $K(d_1, \ldots, d_r)$ jako podprzestrzeń topologiczna $\mathbb{K}^n$ jest homeomorficzna z $\mathbb{K}^N$, gdzie $N = \sum\limits_{k=1}^{r} (d_k - k) = d_1 + \ldots + d_r - \frac{1}{2}r(r+1)$.