1. Teoria krzywych Wyprowadzić wzory na κ i τ w dowolnej parametryzacji.

2. Powierzchnie zanurzone Niech M będzie dwuwymiarową powierzchnią zanurzoną w $\mathbb{R}^3$. Wykazać, że w układzie współrzędnych na M zachodzi wzór

$$K_M(q) = \frac{R_{1212}}{\det[g(q)]}$$

R_{1212} ← składowe tensora krzywizny

Krzywizna Gaussa

wyznacznik macierzy pierwszej formy podstawowej

Użyć wzoru $R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

R_{1212} jest składową tensora krzywizny z „opuszczonym" indeksem: $R(X,Y,Z,T) = g(T, R(X,Y,Z))$

$$R_{ijkl} = g_{lm} R^m_{ijk}$$

3. Koneksja w wiązce wektorowej Sprawdzić, że koneksja jest liniowa wtedy i tylko wtedy gdy jest zachowywana przez potok pola Eulera

4. Koneksja w wiązce wektorowej: Sprawdzić, że pochodna kowariantna, tzn. odwzorowanie

$\nabla : TM \times Sec(\rho) \longrightarrow E$ spełniające warunki

$\rho : E \longrightarrow M$

(1) $\nabla_{\alpha v + \beta w} \sigma = \alpha \nabla_v \sigma + \beta \nabla_w \sigma$

(2) $\nabla_v f\sigma = f \nabla_v \sigma + (vf)\sigma$

(3) $\nabla_v (\sigma + \omega) = \nabla_v \sigma + \nabla_v \omega$

(4) ∇ zachowuje rzut na M, tzn. $\rho(\nabla_v \sigma) = \tau_M(v)$, ponadto jeśli X jest gładkim polem wektorowym a σ gładkim cięciem $E \to M$

$$M \ni q \longmapsto (\nabla_{X(q)} \sigma)(q) \in E$$ też jest gładkim cięciem $E \to M$.

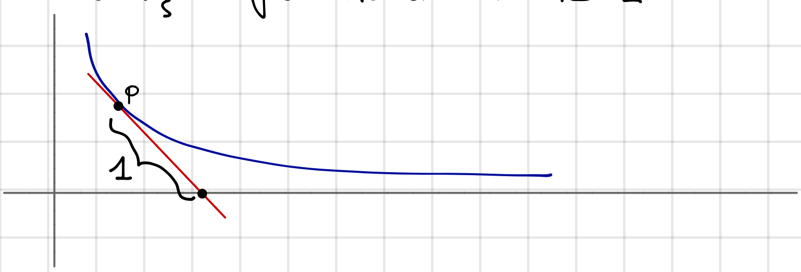
WSKAZÓWKA: Dla ustalonego q, e, σ $q \in M$, $e \in E_q$, $\sigma : M \to E$ $\sigma(q) = e$ rozważyć

$$F_{qe} : T_q M \longrightarrow T_e E \qquad F_{q,e}(v) = T\sigma(v) - (\nabla_v \sigma)^v$$

Pokazać, że F nie zależy od wyboru σ. Wtedy $H_e = F_{qe}(T_q M)$.

5. Geometria powierzchni zanurzonych Znaleźć krzywizny główne i krzywiznę Gaussa powierzchni obrotowej której tworząca jest traktrysą. Traktrysa jest to krzywa płaska, której punkty spełniają warunek:

Odległość punktu p krzywej od punktu przecięcia stycznej do tej krzywej z osią OX jest stała i równa 1



(6) Podrozmaitość lagranżowska Niech $C \subset M$ będzie podrozmaitością, $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ gładką funkcją. Definiujemy

$$L = \{ p \in T^*M : \pi_M(p) \in C , \forall v \in TC \ \langle p, v \rangle = \langle df, v \rangle \}$$

Wykazać, że L jest podrozmaitością lagranżowską

Mechanika lagranżowska

(7) Znaleźć funkcję energii E, formę ω_L, odwzorowanie λ, pole X_{EL} we współrzędnych dla lagranżjanu mechanicznego

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x)$$

dla $V \equiv 0$ porównać X_{EL} z równaniem na horyzontalne podniesienie krzywej dla koneksji metrycznej.