GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II

WYKŁAD 1: KRZYWE W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ

GEOMETRIA II WYKŁAD 1. TEORIA KRZYWYCH W $\mathbb{R}^n$ (głównie w $\mathbb{R}^3$ ...)

Wykład poświęcony będzie krzywym w przestrzeni euklidesowej, tzn w afinicznej przestrzeni n-wymiarowej wyposażonej w dodatnio określony iloczyn skalarny: (E, V, g) dwuliniowa, symetryczna forma niezdegenerowana
afiniczna
modelowe wektorowa

W takiej sytuacji dla celów praktycznych wybiera się bazę, najlepiej ortonormalną i wprowadza związane z tą bazą współrzędne. E wygląda wtedy jak $\mathbb{R}^n$ z kanonicznym iloczynem skalarnym. W praktyce więc pracować będziemy w $\mathbb{R}^n$.

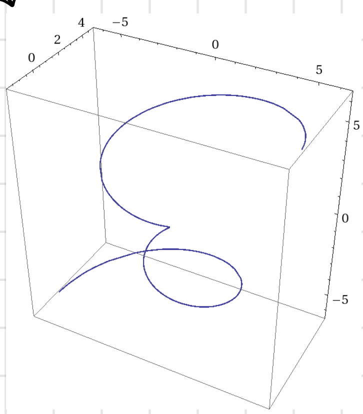
DEFINICJA: Krzywą w E nazywamy ciągłe odwzorowanie $\gamma: \mathbb{R} \supset I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Mówimy że γ jest krzywą różniczkowalną, klasy C^k, gładką jeśli to odwzorowanie jest odpowiedniej klasy różniczkowalności w sensie wykładu z Analizy. Mówimy, że krzywa jest regularna jeśli jest przynajmniej klasy C^1 i wektor styczny $\dot\gamma(t)$ jest niezerowy dla każdego t.

$\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} (t\cos t, -t\sin t, at)$ $a>0$ jest klasy C^∞ i regularna

$\dot\gamma(t) = (\cos t - t\sin t)e_x + (-\sin t - t\cos t)e_y + a e_z \neq 0$ bo $a \neq 0$

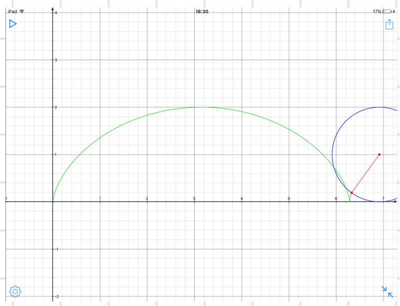
$\mathbb{R} \ni t \overset{\eta}{\longmapsto} (t - \sin t, 1 - \cos t)$ jest krzywą gładką, ale nie jest regularna

$\dot\eta(t) = (1 - \cos t)e_x + \sin t\, e_y$ $\quad \dot\eta(0) = \dot\eta(2k\pi) = 0$



LINIA ŚRUBOWA NAWINIĘTA NA STOŻKU

CYKLOIDA



Zgodnie z odpowiednimi twierdzeniami obraz krzywej regularnej jest lokalnie powierzchnią (podrozmaitością) wymiaru 1.

Fakt, że pracujemy w przestrzeni Euklidesowej pozwala wyznaczać długość fragmentów krzywej. Prawdopodobnie uczyli się Państwo w poprzednim semestrze obliczanie objętości (w przypadku dwuwymiarowym pola powierzchni, w przypadku jednowymiarowym długości krzywej) związanej z metryką (tensorem metrycznym) na danej powierzchni. W przypadku powierzchni zanurzonych w $\mathbb{R}^n$ należy obciąć tensor metryczny do powierzchni, wyznaczyć odpowiadającą mu formę objętości i następnie tę formę odcałkować po danym fragmencie powierzchni. Dla krzywej regularnej postaci $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ obcięcie tensora $g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$ jest postaci $g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j\, dt \otimes dt$, forma objętości przy orientacji zgodnej z parametryzacją to $\sqrt{g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j}\, dt$ zatem

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

długość wektora stycznego do krzywej.

Policzmy długość łuku cykloidy: $\eta(t) = (1-\cos t)e_x + \sin t\, e_y$ $\quad \|\eta(t)\|^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t =$

$= 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1-\cos t) = 2\cdot 2\sin^2 t/2 = 4\sin^2 t/2 \quad \|\eta(t)\| = 2\sin t/2$ dla $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} 2\sin t/2\, dt = 2\left(-\cos t/2 \cdot 2\right)\Big|_0^{2\pi} = 4(-\cos\pi + \cos 0) = 8$$

Krzywe regularne mają pewną wyróżnioną parametryzację: DEFINICJA Parametryzację krzywej taką że $L(\gamma; t_1, t_2) = t_2 - t_1$ nazywamy parametryzacją naturalną albo łukową. Dwie parametryzacje naturalne różnią się jedynie o przesunięcie. Długość wektora stycznego krzywej z parametryzacją naturalną jest równa 1 w każdym punkcie.

Wyznaczmy związek między parametrem t a parametrem naturalnym dla cykloidy:

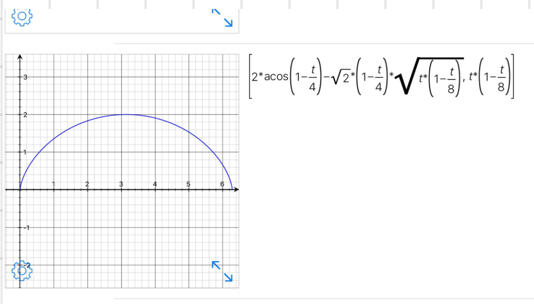
$$s(t) = \int_0^t 2\sin \varphi/2\, d\varphi = -4\cos\varphi/2\Big|_0^t = -4\cos t/2 + 4 = 4(1-\cos t/2)$$

$$s = 4(1-\cos t/2) \quad \frac{s}{4} = 1 - \cos t/2 \quad \cos t/2 = 1 - s/4 \quad t/2 = \arccos(1 - s/4)$$
$$s \in [0, 8]$$
$$t = 2\arccos(1 - s/4)$$

$$\cos t = \cos(2\arccos(1-s/4)) = \cos^2(\arccos(1-s/4)) - \sin^2(\arccos(1-s/4)) = (1-s/4)^2 - (1-(1-s/4)^2) =$$
$$= 2(1-s/4)^2 - 1$$
$$1 - \cos t = 1 - 2(1-s/4)^2 + 1 = 2(1-(1-s/4)^2) = 2\left(2\frac{s}{4} - \frac{s^2}{16}\right) = s - \frac{s^2}{8} = s(1-s/8)$$
$$\sin t = 2\sin t/2 \cos t/2 = 2\sin(\arccos(1-s/4))\cos(\arccos(1-s/4)) = 2(1-s/4)\sin(\arccos(1-s/4)) =$$
$$\sin^2(\arccos(1-s/4)) = 1-(1-s/4)^2 \quad \sin(\cdot\cdot) = \pm\sqrt{\frac{s}{2} - \frac{s^2}{16}} = \pm\sqrt{\frac{s}{2}\left(1-\frac{s}{8}\right)}$$
$$= 2(1-s/4)\sqrt{\frac{s}{2}\left(1-\frac{s}{8}\right)}$$

$$[0,8] \ni s \longmapsto \left[2\arccos(1-s/4) - \sqrt{2}(1-s/4)\sqrt{s(1-s/8)},\ s(1-s/8)\right]$$

NATURALNA PARAMETRYZACJA ŁUKU CYKLOIDY!



W dalszym ciągu, dla ułatwienia, zakładać będziemy, że pracujemy z krzywą gładką i regularną. Niech γ będzie ponadto sparametryzowane naturalnie. Parametr będziemy oznaczać s. Wektor styczny $\dot\gamma(s)$ oznaczać będziemy $\bar{t}(s)$. Wiadomo, że $\|\bar{t}(s)\| = 1$. Różniczkując stałą $1 = \|\bar{t}(s)\|^2$ po s dostajemy

$$0 = \frac{d}{ds} g_{ij}\bar{t}^i(s)\bar{t}^j(s) = 2g_{ij}\bar{t}^i\dot{\bar{t}}^j = 2(\bar{t}(s)|\dot{\bar{t}}(s))$$

Oznacza to, że wektor $\frac{d}{ds}\bar{t}(s) = \dot{\bar{t}}(s)$ jest prostopadły do do wektora stycznego.

DEFINICJA: Długość wektora $\dot{\bar{t}}(s)$ nazywamy krzywizną krzywej γ i oznaczamy κ. Unormowany wektor $\dot{\bar{t}}(s)$, tzn wektor $\bar{m}$ taki, że $\dot{\bar{t}}(s) = \kappa(s)\,\bar{m}(s)$ nazywamy wektorem normalnym głównym dla krzywej γ. Wektor ten jest jednoznacznie wyznaczony jeśli $\kappa(s) \neq 0$

Tak zdefiniowana krzywizna jest zawsze dodatnia (lub 0).

$$[0,8] \ni s \longmapsto \left[2\arccos(1-s/4) - \sqrt{2}(1-s/4)\sqrt{s(1-s/8)}\,,\ s(1-s/8)\right]$$

$$\left(2\arccos(1-\tfrac{s}{4}) - \sqrt{2}(1-\tfrac{s}{4})\sqrt{s(1-\tfrac{s}{8})}\right)' = \frac{1}{4}\sqrt{s(8-s)} \qquad \left[s(1-s/8)\right]' = (1-\tfrac{s}{8}) + s\left(-\tfrac{1}{8}\right) = 1-\tfrac{s}{8}-\tfrac{s}{8} = 1-\tfrac{s}{4}$$

$$\bar{t}(s) = \frac{1}{4}\sqrt{s(8-s)}\,e_x + \left(1-\frac{s}{4}\right)e_y$$

$$\dot{\bar{t}}(s) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2\sqrt{s(8-s)}}\cdot(8-2s)\,e_x + \left(-\frac{1}{4}\right)e_y = \frac{1-s/4}{\sqrt{s(8-s)}}\,e_x - \frac{1}{4}e_y$$

$$\kappa^2(s) = \|\dot{\bar{t}}(s)\|^2 = \frac{(1-s/4)^2}{s(8-s)} + \frac{1}{16} = \frac{1 - \cancel{\frac{s}{2}} + \cancel{\frac{s^2}{16}} + \cancel{\frac{s}{2}} - \cancel{\frac{s^2}{16}}}{s(8-s)} = \frac{1}{s(8-s)}$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{s(8-s)}} \qquad \bar{m} = \left(1-\frac{s}{4}\right)e_x - \frac{1}{4}\sqrt{s(8-s)}\,e_y$$

Geometryczna interpretacja krzywizny krzywej płaskiej: THIERDZENIE Niech $\varphi(s,\delta s)$ oznacza kąt między wektorami $\bar{t}(s)$ i $\bar{t}(s+\delta s)$. Wówczas

$$\kappa(s) = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\varphi(s,\delta s)}{\delta s}$$

DOWÓD: Wektory $\bar{t}(s)$ i $\bar{m}(s)$ stanowią ortonormalną bazę w $\mathbb{R}^2$. W tej bazie można rozłożyć wektor $\bar{t}(s+\delta s)$. Zgodnie z zasadami mamy

$$\bar{t}(s+\delta s) = \underbrace{(\bar{t}(s+\delta s)\,|\,\bar{t}(s))}_{\cos\varphi(s,\delta s)}\bar{t}(s) + \underbrace{(\bar{t}(s+\delta s)\,|\,\bar{m}(s))}_{\substack{\text{cosinus kąta między } \bar{t}(s+\delta s) \text{ a } \bar{m}(s) \\ \cos(\pi/2 - \varphi(s,\delta s)) = \sin\varphi(s,\delta s)}} m(s) =$$

$$= \cos\varphi(s,\delta s)\,\bar{t}(s) + \sin(\varphi(s,\delta s))\,\bar{m}(s)$$

$$\frac{d}{ds}\bar{t}(s) = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\bar{t}(s+\delta s) - \bar{t}(s)}{\delta s} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{1}{\delta s}\left[\cos\varphi(s,\delta s)\,\bar{t}(s) + \sin(\varphi(s,\delta s))\,\bar{m}(s) - \bar{t}(s)\right]$$

$$= \lim_{\delta s \to 0} \frac{1}{\delta s}\left[\{\cos\varphi(s,\delta s) - 1\}\,\bar{t}(s) + \sin(\varphi(s,\delta s))\,\bar{m}(s)\right] = *$$

gdy $\delta s \to 0$ $\varphi(s,\delta s) \to 0$ zatem $\displaystyle\lim_{\delta s \to 0} \frac{\sin(\varphi(s,\delta s))}{\delta s} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\sin(\varphi(s,\delta s))}{\varphi(s,\delta s)}\cdot\frac{\varphi(s,\delta s)}{\delta s} =$

$$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} \lim_{\delta s \to 0} \frac{\varphi(s,\delta s)}{\delta s} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\varphi(s,\delta s)}{\delta s}$$

$$\frac{\cos\varphi(s,\delta s) - 1}{\delta s} \approx \frac{1 - \frac{\varphi^2(s,\delta s)}{2} + \ldots - 1}{\delta s} \approx -\frac{\varphi^2(s,\delta s)}{\delta s} \xrightarrow[\delta s \to 0]{} 0$$

$$= \lim_{\delta s \to 0} \frac{\varphi(s,\delta s)}{\delta s} \bar{n}(s)$$ z drugiej strony $\frac{d}{ds}\bar{t}(s) = k(s)\bar{n}(s)$ zatem

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\varphi(s,\delta s)}{\delta s} = k(s)$$

■

W wymiarze 2 wektory $\bar{t}$ i $\bar{n}$ stanowią bazę $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$. Baza ta nazywa się reperem Freneta. Zależy on oczywiście od punktu krzywej. Reper Freneta ma następującą własność

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\bar{t}(s)\\ \bar{n}(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k(s)\\ -k(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{t}(s)\\ \bar{n}(s)\end{bmatrix}$$

Pierwsze równanie to po prostu definicja krzywizny. Drugie nietrudno wyprowadzić:

$(t(s)|n(s)) = 0 \quad \frac{d}{ds}(\bar{t}(s)|\bar{n}(s)) = (\dot{\bar{t}}(s)|\bar{n}(s)) + (\bar{t}(s)|\dot{\bar{n}}(s)) = k(s)\underbrace{(\bar{n}(s)|\bar{n}(s))}_{=1} +$
$(\bar{t}(s),\dot{\bar{n}}(s)) \Rightarrow (\bar{t}(s)|\dot{\bar{n}}(s)) = -k(s)$

$(\bar{n}(s)|\bar{n}(s)) = 1 \Rightarrow 0 = 2(\dot{\bar{n}}(s)|\bar{n}(s)) \Rightarrow \dot{n}(s) = \alpha\bar{t}(s)$

$\Rightarrow \alpha = -k(s)$

Pojęcie reperu Freneta uogólniamy na n-wymiarową przestrzeń: Niech $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ będzie krzywą regularną sparametryzowaną naturalnie. Załóżmy także, że wektory $\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s), \dots, \gamma^{(k)}(s), \dots, \gamma^{(n)}(s)$ są liniowo niezależne. DEFINICJA: Reperem Freneta w $\mathbb{R}^n$ nazywamy bazę $(t_1(s), \dots t_n(s))$ taką, że $(t_1, \dots, t_{n-1})$ jest wynikiem ortonormalizacji Grama-Schmidta układu wektorów $\dot{\gamma} \dots \gamma^{(n-1)}$ zaś t_n dobieramy tak aby t_n był prostopadły do poprzednich, miał długość 1 i baza $(t_1 \dots, t_n)$ była zorientowana dodatnio.

Można pokazać, że w takim przypadku zachodzi równanie

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\\ \vdots\\ t_{n-1}\\ t_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\\ \vdots\\ t_{n-1}\\ t_n\end{bmatrix}$$

Dowodzić tego nie będziemy, tylko dokładniej przyjrzymy się przypadkowi $n=3$.

KRZYWE W $\mathbb{R}^3$

Załóżmy, że $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ jest gładką krzywą regularną. Podobnie jak w przypadku płaskim jeśli γ jest sparametryzowane naturalnie mamy wektor styczny $\bar{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$ długości 1 oraz wektor $\dot{\bar{t}}(s)$ prostopadły do $\bar{t}(s)$. Definiujemy wektor normalny główny $\bar{n}(s) = \dot{\bar{t}}(s)/\|\dot{t}(s)\|$ i oznaczamy $k(s) = \|\dot{\bar{t}}(s)\|$. Mamy więc $\dot{\bar{t}}(s) = k(s)\bar{n}(s)$. Zgodnie z przepisem na reper Freneta $\bar{b}(s) = \bar{t}(s) \times \bar{n}(s)$.

Zauważmy, że skoro $\|\bar{n}(s)\| = 1$ to $(\dot{\bar{n}}(s)|\bar{n}(s)) = 0$, czyli $\dot{\bar{n}}(s)$ jest prostopadły do $\bar{n}$. Znaczy to, że $\dot{\bar{n}}(s) = \alpha\bar{t}(s) + \beta\bar{b}(s)$

Dodatkowo $\frac{d}{ds}(t|n)=0$, tzn $(\dot{t}|n)+(t|\dot{n})=0 \quad k+(t|\dot{n})=0 \quad k+(t|\alpha t+\beta \bar{b})=0$

$k+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-k$ zatem $\dot{\bar{n}}=-k\bar{t}+\beta\bar{b}$

↖ tę liczbę oznaczamy zwyczajowo τ i nazywamy skręceniem albo torsją krzywej.

Jak na razie mamy równanie $\dot{\bar{t}}=k\bar{n}$ $\dot{\bar{n}}=-k\bar{t}+\tau\bar{b}$. Pozostaje do policzenia $\dot{\bar{b}}$. Ponieważ $\bar{b}$ ma długość 1 wiadomo, że $\dot{\bar{b}}$ jest prostopadłe do b, czyli musi być kombinacją $\bar{n}$ i $\bar{t}$: $\dot{\bar{b}}=a\bar{n}+b\bar{t}$

$(\bar{b}|\bar{t})=0 \Rightarrow (\dot{\bar{b}}|\bar{t})+(\bar{b}|\dot{\bar{t}})=0 \quad (\dot{\bar{b}}|t)+\underbrace{(\bar{b}|k\bar{n})}_{=0}=0 \Rightarrow (\dot{\bar{b}}|\bar{t})=0 \Rightarrow b=0$

$(\bar{b}|\bar{n})=0 \Rightarrow (\dot{\bar{b}}|\bar{n})+(\bar{b}|\dot{\bar{n}})=0$

$\quad (\bar{b}|-k\bar{t}+\tau\bar{b}) \Rightarrow (\dot{\bar{b}}|\bar{n})+\tau=0 \Rightarrow a=-\tau$

$\dot{\bar{b}}=-\tau\bar{n}$ Wzory zaznaczone na zielono to wzory Freneta. Można je, tak jak poprzednio, zapisać macierzowo

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\bar{t}\\ \bar{n}\\ \bar{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{t}\\ \bar{n}\\ \bar{b}\end{bmatrix}$$

Nazwy
$\langle \bar{t},\bar{n}\rangle$ płaszczyzna ściśle styczna
$\langle \bar{n},\bar{b}\rangle$ płaszczyzna normalna
$\langle \bar{t},\bar{b}\rangle$ płaszczyzna prostująca

TWIERDZENIE: Następujące warunki są równoważne: (1) γ jest krzywą płaską, (2) $\tau=0$, (3) $\bar{b}$ jest wektorem stałym.

DOWÓD (1) ⇒ (3) jest oczywiste: jeśli γ leży w pewnej płaszczyźnie to jest to płaszczyzna rozpięta przez $\bar{n}$ i $\bar{t}$. W tej sytuacji $\bar{b}$ jest prostopadły do tej płaszczyzny, wobec tego stały. (3) ⇒ (2) jest też mniej więcej oczywiste: Jeśli $\bar{b}$ jest stały to $\dot{\bar{b}}=0=-\tau\bar{n}$. Wektor $\bar{n}$ jest niezerowy, wobec tego $\tau=0$.

(3) ⇒ (1) Wyznaczmy $\frac{d}{dt}(\gamma|\bar{b})=\underset{\substack{0 \\ \text{bo } \bar{b}\perp \text{do } \dot{\gamma}=\bar{t}}}{(\dot{\gamma}|\bar{b})}+\underset{\substack{0 \\ \text{bo } \bar{b} \text{ stały}}}{(\gamma|\dot{\bar{b}})}=0$ Oznacza to, że $(\gamma|\bar{b})=D=\text{const.}$

Załóżmy że w bazie kanonicznej $\gamma(\varphi)=(x(\varphi),y(\varphi),z(\varphi))$ i $\bar{b}=(A,B,C)$, wtedy

$\gamma(\varphi)$ spełnia $Ax(\varphi)+By(\varphi)+Cz(\varphi)=D$ czyli γ leży w płaszczyźnie $Ax+By+Cz=D$.

(2) ⇒ (3) Jeśli $\tau=0$ to $\dot{\bar{b}}=-\tau\bar{n}=0$, czyli $\bar{b}$ jest stały.

$$\begin{array}{ccc} & (1) & \\ & \nwarrow\searrow & \\ (2) & \Longleftrightarrow & (3)\end{array}$$ ■

ZADANIE DOMOWE: WYPROWADZIĆ WZORY NA k i τ W DOWOLNEJ PARAMETRYZACJI