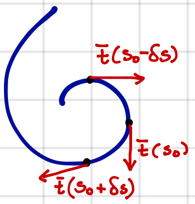
GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II

WYKŁAD 2: GEOMETRIA POWIERZCHNI ZANURZONYCH

GEOMETRIA II WYKŁAD 2 POWIERZCHNIE ZANURZONE W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ

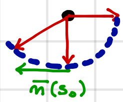
Pracując w przestrzeni Euklidesowej (np w $\mathbb{R}^n$) z obiektami typowymi dla geometrii różniczkowej (wektory styczne, kowektory, pola, formy) korzystamy często z faktu, że możemy porównywać np. wektory styczne zaczepione w różnych punktach. Podobnie postępować możemy z kowektorami i wielokowektorami. Z możliwości tej korzystaliśmy np. definiując wektor normalny główny dla krzywej regularnej: wektor styczny $\bar{t}(s)$ zaczepiony jest w punkcie $\gamma(s)$, należy więc do $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^n$. Do celów różniczkowania abstrahujemy od punktu zaczepienia. Ponieważ $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (czarny punkt zaczepienia, czerwony wektor styczny) krzywą $\bar{t}(s)$ traktujemy jak krzywą w przestrzeni czerwonej i różniczkujemy jak zwykle



$s \longmapsto \gamma(s)$

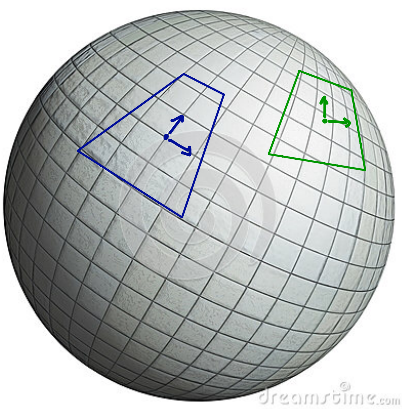
wyjściowa krzywa

$s \longmapsto \bar{t}(s)$



krzywa zakreślana przez wektory styczne

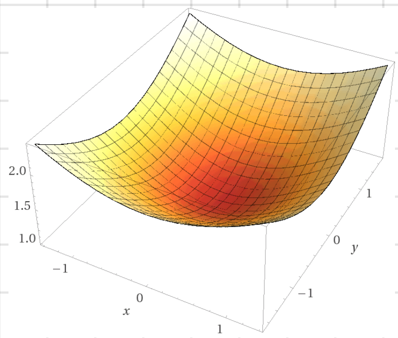
Rozważmy teraz powierzchnię M wymiaru k zanurzoną w $\mathbb{R}^n$. W każdym punkcie $x \in M$ T_xM jest k wymiarową podprzestrzenią w $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$. T_xM jest więc izomorficzna z $\mathbb{R}^k$ ale nie kanonicznie. Nie mamy także żadnego związku między wektorami stycznymi w różnych punktach. Weźmy np sferę $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Podprzestrzenie niebieska i zielona są zawarte w $\mathbb{R}^3$, ale które niebieskie wektory odpowiadają którym zielonym – nie wiadomo. W dalszym ciągu zajmiemy się problemem różniczkowania obiektów typu pole wektorowe, formy różniczkowe na powierzchniach zanurzonych w przestrzeni Euklidesowej. Używać będziemy zarówno zanurzenia jak i iloczynu skalarnego. Jest to temat zaliczany do klasycznych zagadnień geometrii różniczkowej. Wszystkie pojęcia ilustrować będziemy rachunkami dla górnej powłoki hiperboloidy dwupowłokowej zanurzonej w $\mathbb{R}^3$

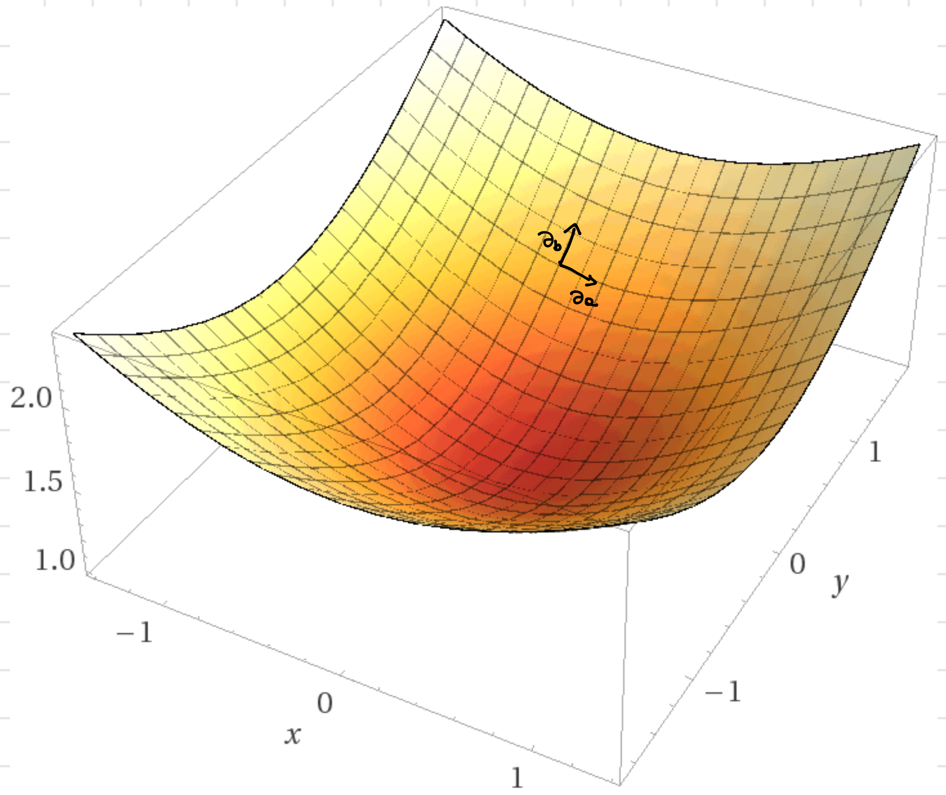


$$\mathcal{H} = \{(x,y,z) : z^2 - x^2 - y^2 = 1, \ z > 0\}$$

Początkowo używać będziemy globalnej parametryzacji $\mathcal{H}$ $\mathbb{R}^2 \ni (a,b) \longmapsto (a, b, \sqrt{1+a^2+b^2}) \in \mathcal{H}$. Kiedy mówić będziemy o powierzchni M zanurzonej w E używać będziemy parametryzacji powierzchni $\mathbb{R}^k \supset \mathcal{U} \ni (u^1, \dots, u^k) \longmapsto (x^1(u), \dots, x^n(u)) \in M$. Wektory styczne do M zapisywać można w bazie $\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}$ ale także w bazie związanej ze współrzędnymi ortonormalnymi $(x^1, \dots, x^n)$ czyli $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$. Na przykład przestrzeń styczna $T\mathcal{H}$ w punkcie q o współrzędnych (a,b) rozpięta jest przez

$$\partial_a = \partial_x + \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\partial_z \qquad \partial_b = \partial_y + \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\partial_z$$





Zauważmy, że iloczyn skalarny można obciąć do powierzchni M:

DEFINICJA: Pierwszą formę podstawową na powierzchni M nazywamy obcięcie iloczynu skalarnego z TE do TM.

Zauważmy, że w przestrzeni $TE = E \times V$ iloczyn skalarny jest stały, tzn. w każdym punkcie E iloczyn skalarny w $T_q E = V$ jest taki sam. Obcięcie do TM jednak zależy od punktu, bo w każdym punkcie obcinamy do innej podprzestrzeni.

Macierz iloczynu skalarnego dostajemy licząc iloczyny skalarne wektorów bazowych

$g_{ij} = (\partial_{u^i} | \partial_{u^j})$ W naszym przykładzie na $\mathcal{H}$ dostajemy

$$(\partial_a|\partial_a) = 1 + \frac{a^2}{1+a^2+b^2} \qquad (\partial_b|\partial_b) = 1 + \frac{b^2}{1+a^2+b^2} \qquad (\partial_a|\partial_b) = \frac{ab}{1+a^2+b^2}$$

$$[g] = \frac{1}{1+a^2+b^2}\begin{bmatrix} 1+2a^2+b^2 & ab \\ ab & 1+a^2+2b^2 \end{bmatrix}$$

Używając notacji tensorowej g zapisalibyśmy jako

$$g = \frac{1}{1+a^2+b^2}\Big((1+2a^2+b^2)\, da \otimes da + ab\,(da \otimes db + db \otimes da) + (1+a^2+2b^2)\, db \otimes db \Big)$$

Niezależnie od zapisu g jest formą dwuliniową symetryczną na $T\mathcal{H}$.

Jak już wspomnieliśmy pola wektorowe na E można różniczkować w kierunku wektorów stycznych do $\mathbb{R}^n$ „po współrzędnych" używając globalnego układu współrzędnych. Np jeśli $Y = Y^i(x)\partial_{x^i}$ wyznaczyć możemy $D_v Y$ dla $v \in T_x\mathbb{R}^n$ $v = v^i \partial_{x^i}$ według wzoru:

$$(D_v Y)^i \partial_{x^i} = \underbrace{\left(v^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right)}_{\text{każdą współrzędną pola różniczkujemy oddzielnie}} \partial_{x^i}$$

Wzór ma sens mimo że wyrażony jest we współrzędnych bo współrzędne $(x^1 \ldots x^n)$ są globalne i wzór zachowuje postać przy zmianie bazy

$y^i = A^i_j x^j \Rightarrow \partial_{x^i} = A^j_i \partial_{y^j}$

$Y = Y^i \partial_{x^i} = Z^l \partial_{y^l}$ tzn $Z^l = A^l_k Y^k$

$v = v^i \partial_{x^i} = u^j \partial_{y^j}$ tzn $u^j = A^j_l v^l$

$$D_v Y = u^i \frac{\partial Z^l}{\partial y^i} \partial_{y^l} = A^i_k v^k \frac{\partial}{\partial y^i}(A^l_m Y^m) \frac{\partial}{\partial y^l} = $$

$$= v^k \underbrace{A^i_k \frac{\partial}{\partial y^i}}_{\frac{\partial}{\partial x^k}} Y^m \underbrace{A^l_m \partial_{y^l}}_{\partial_{x^m}} = v^k \frac{\partial Y^m}{\partial x^k} \partial_{x^m}$$

Całość działa bo macierz A jest stała.

W dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych na M nie zadziała – macierz zmiany bazy nie będzie raczej stała i nie można jej „wyjąć" z różniczkowania. Pola wektorowe na M można różniczkować po współrzędnych jedynie w kierunku wektorów stycznych do M i jedynie wtedy gdy są wyrażone w bazie zewnętrznej przestrzeni. Wynik różniczkowania nie musi być styczny do M. Na przykład na hiperboloidzie $\mathcal{H}$ możemy zróżniczkować pole ∂_a w kierunku wektora ∂_a w ustalonym $q=(a,b)$ **3**

$$\partial_a = \partial_x + \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\partial_z \qquad D_{\partial_a}\partial_a = \left(\frac{\partial}{\partial a}1\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right)\partial_z = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}^3}\right)\partial_z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\left(1-\frac{a^2}{1+a^2+b^2}\right)\partial_z = \frac{1+b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}^3}\partial_z$$

$D_{\partial_a}\partial_a$ ma jedynie składową w kierunku ∂_z nie może być więc styczny do $\mathcal{H}$.

Ze względu na istnienie iloczynu skalarnego w $T_q\mathbb{R}^n$ możemy rozłożyć $T_q\mathbb{R}^n$ na T_qM i $(T_qM)^\perp$. Korzystając z tego rozkładu możemy napisać

$$D_v X = (D_v X)^{\parallel} + (D_v X)^\perp \quad \text{dla } X \text{ będącego polem na } M \text{ i } v \in T_qM$$

część styczną do M oznaczamy $\nabla_v X$, tzn $\boxed{\nabla_v X = D_v X - (D_v X)^\perp}$ (*)

Policzmy $\nabla_{\partial_a}\partial_a$: W tym celu potrzebujemy pola N wektorów normalnych do $\mathcal{H}$ o długości 1.

$$(N|\partial_a)=0 \quad (N|\partial_b)=0 \quad (N|N)=1 \qquad N=\frac{1}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}}\left(-a\partial_x - b\partial_y + \sqrt{1+a^2+b^2}\,\partial_z\right)$$

$$\nabla_{\partial_a}\partial_a = D_{\partial_a}\partial_a - (N|D_{\partial_a}\partial_a)N = \frac{1+b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}^3}\partial_z - \frac{1+b^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}\left(-a\partial_x - b\partial_y + \sqrt{1+a^2+b^2}\,\partial_z\right)$$

$$= \frac{1+b^2}{(1+a^2+b^2)(1+2a^2+2b^2)}\left[\frac{1+2a^2+2b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}} - \frac{1+a^2+b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right]\partial_z + \frac{1+b^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}(a\partial_x + b\partial_y) =$$

$$= \frac{1+b^2}{(1+a^2+b^2)(1+2a^2+2b^2)}\Big[\underbrace{a\partial_x + b\partial_y + \frac{a^2+b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\partial_z}_{a\partial_a + b\partial_b}\Big] = \dots (a\partial_a + b\partial_b)$$

$$\nabla_{\partial_a}\partial_a = \frac{1+b^2}{(1+a^2+b^2)(1+2a^2+2b^2)}(a\partial_a + b\partial_b)$$

STWIERDZENIE

Operacja zdefiniowana wzorem (*) ma następujące własności:

(1) $\nabla_{v+w}X = \nabla_v X + \nabla_w X$

(2) $\nabla_{\lambda v}X = \lambda\nabla_v X$

(3) $\nabla_v(X+Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y$

(4) $\nabla_v(fX) = (vf)X + f(q)\nabla_v X$

Własności (1)-(3) są oczywiste. Jedynie (4) wymaga sprawdzenia:

$$D_v(fX) = (vf)X + f(q)D_vX = (vf)X + f(q)(D_vX)^{\parallel} + f(q)(D_vX)^\perp$$

Część zaznaczona na zielono jest styczna do M

zatem $\nabla_v(fX) = D_v(fX)^{\parallel} = (vf)X + f(q)(D_vX)^{\parallel} = (vf)X + f(q)\nabla_v X$

Operacja ∇_v nosi nazwę pochodnej kowariantnej na powierzchni M. Zdefiniowaliśmy ją na polach wektorowych. Zauważmy, że można rozszerzyć ją na pole kowektorowe czyli formy a także na dowolne pole tensorowe. Jak pochodna kowariantna działa na formy?

Mając rozkład $T_q\mathbb{R}^n = T_qM \oplus (T_qM)^\perp$ możemy rozłożyć też przestrzeń dualną
$T_q^*\mathbb{R}^n = T_q^*M \oplus (T_qM)^\circ$ jeśli $\alpha \in T_q^*\mathbb{R}^n$ to $\alpha^\parallel$ oznacza składową w T^*M a $\alpha^\perp$ w $(T_qM)^\circ$
Pochodną kowariantną na formy rozszerzymy żądając, aby zachodziła reguła Leibniza tzn, aby dla α-formy na M i X-pola na M zachodził wzór

$$D_v\langle\alpha,X\rangle = \langle\nabla_v\alpha,X\rangle + \langle\alpha,\nabla_vX\rangle$$

Robimy rachunek używając zanurzenia

$$D_v\langle\alpha,X\rangle = \langle D_v\alpha,X\rangle + \langle\alpha,D_vX\rangle = \langle(D_v\alpha)^\parallel,X\rangle + \langle(D_v\alpha)^\perp,X\rangle + \langle\alpha,\nabla_vX\rangle + \langle\alpha,(D_vX)^\perp\rangle$$

Części zaznaczone na zielono znikają. Pierwsza, bo $(D_vX)^\perp$ należy do $(T_qM)^\circ$ zaś $X\in T_qM$, druga, bo $\alpha\in T^*M$ a T^*M anihiluje $(T_qM)^\perp$. Pozostaje więc

$$D_v\langle\alpha,X\rangle = \langle(D_v\alpha)^\parallel,X\rangle + \langle\alpha,\nabla_vX\rangle$$

Z porównania rzeczy niebieskich mamy $\boxed{\nabla_v\alpha = (D_v\alpha)^\parallel = D_v\alpha - (D_v\alpha)^\perp}$

Udało nam się rozszerzyć pochodną kowariantną także na formy. Stosując regułę Leibniza możemy zdefiniować pochodną kowariantną dowolnego obiektu tensorowego. Możemy na przykład treningowo zróżniczkować kowariantnie pierwszą formę podstawową g. Zgodnie z regułą Leibniza powinniśmy mieć:

$$\nabla_v(g(X,Y)) = D_v(g(X,Y)) = (\nabla_vg)(X,Y) + g(\nabla_vX,Y) + g(X,\nabla_vY)$$

Z drugiej strony wiemy że g jest obcięciem stałej formy $\tilde g$ z $T\mathbb{R}^n$, tzn $g(X,Y)=\tilde g(X,Y)$ dla X,Y na M.
Na $\mathbb{R}^n$ mamy

$$D_v(g(X,Y)) = D_v(\tilde g(X,Y)) = \underbrace{D_v\tilde g}_{0 \text{ bo } \tilde g \text{ stała}}(X,Y) + \tilde g(D_vX,Y) + \tilde g(X,D_vY) =$$

$$= \tilde g((D_vX)^\perp + \nabla_vX, Y) + \tilde g(X,(D_vY)^\perp + \nabla_vY) = g(\nabla_vX,Y) + g(X,\nabla_vY)$$

Z porównania niebieskich mamy $(\nabla_vg)(X,Y) + g(\nabla_vX,Y) + g(X,\nabla_vY) = g(\nabla_vX,Y) + g(X,\nabla_vY)$
Kolorowe składniki się upraszczają i mamy

$(\nabla_vg)(X,Y) = 0$ X,Y są dowolne, więc $\nabla_vg = 0$.

Pochodna kowariantna metryki w dowolnym kierunku znika. To jest własność, która pojawi się jeszcze później – należy ją sobie zapamiętać.

Pochodna kowariantna jest operacją wewnętrzną na M. Spróbujmy ją zapisać w wewnętrznych współrzędnych. W tym celu weźmy układ współrzędnych $(u^1,\dots,u^k)$ na M i zapiszmy

Pole wektorowe Y na M w bazie ∂_{u^μ}

$$Y = Y^1(u)\partial_{u^1} + \dots + Y^k(u)\partial_{u^k} = Y^\mu(u)\partial_{u^\mu}$$

$$\nabla_v Y = \nabla_v\left(Y^\mu(u)\partial_{u^\mu}\right) = (vY^\mu)\partial_{u^\mu} + Y^\mu(u)\nabla_v\partial_{u^\mu}$$ biorąc $v = v^\nu\partial_{u^\nu}$

mamy

$$\nabla_v Y = \left(v^\nu \frac{\partial Y^\mu}{\partial u^\nu}\right)\partial_{u^\mu} + Y^\mu(u)v^\nu \nabla_{\partial_{u^\nu}}\partial_{u^\mu}$$

zwykłe różniczkowanie po współrzędnych

w tym tkwi współrzędnościowa istota sprawy!

Wektor $\nabla_{\partial_{u^\nu}}\partial_{u^\mu}$ rozkładamy w bazie ∂_{u^σ}: $\nabla_{\partial_{u^\nu}}\partial_{u^\mu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\partial_{u^\sigma}$

Symbole Christoffela

Ostatecznie $$\boxed{(\nabla_v Y)^\mu = v^\nu \frac{\partial Y^\mu}{\partial u^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\nu Y^\sigma(u)}$$

Podobnie policzyć możemy dla form różniczkowych. Jeśli $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu$ to dla dowolnego pola mamy $\langle \alpha, Y\rangle = \alpha_\mu Y^\mu$

$$\nabla_v\langle\alpha,Y\rangle = D_v\langle\alpha,Y\rangle = v^\nu\frac{\partial}{\partial u^\nu}(\alpha_\mu Y^\mu) = v^\nu\left(\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial u^\nu}\right)Y^\mu + v^\nu\alpha_\mu\frac{\partial Y^\mu}{\partial u^\nu}$$

$$\|$$

$$\langle\nabla_v\alpha, Y\rangle + \langle\alpha,\nabla_v Y\rangle = (\nabla_v\alpha)_\mu Y^\mu + \alpha_\sigma\left(v^\nu\frac{\partial Y^\sigma}{\partial u^\nu}\right) + \alpha_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu}v^\mu Y^\nu$$ zielone się upraszczą

$$v^\nu\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial u^\nu}Y^\mu = (\nabla_v\alpha)_\mu Y^\mu + \Gamma^\sigma_{\nu\mu}v^\nu Y^\mu\alpha_\sigma$$

z dowolności Y mamy $$\boxed{(\nabla_v\alpha)_\mu = v^\nu\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial u^\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}v^\nu\alpha_\sigma}$$

Do kompletu własności pochodnej kowariantnej na powierzchni zanurzonej potrzebujemy jeszcze jednego stwierdzenia

STWIERDZENIE: Współczynniki Christoffela na powierzchni zanurzonej są symetryczne ze względu na dolne wskaźniki

DOWÓD: Weźmy dwa pola wektorowe X i Y na M i policzmy $\nabla_X Y - \nabla_Y X$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = D_X Y - (D_X Y)^\perp - D_Y X + (D_Y X)^\perp = (D_X Y - D_Y X) - (D_X Y - D_Y X)^\perp = [X,Y] - [X,Y]^\perp$$

X, Y są styczne do M, zatem $[X,Y]$ też jest styczny do M. Wobec tego $[X,Y]^\perp = 0$.
Mamy zatem $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ weźmy $X = \partial_{u^\mu}$ $Y = \partial_{u^\nu}$ wtedy $[X,Y] = 0$ i

$$\nabla_{\partial_{u^\mu}}\partial_{u^\nu} - \nabla_{\partial_{u^\nu}}\partial_{u^\mu} = 0 = \left(\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\right)\partial_{u^\sigma}$$ zatem $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$ ■

PRZYKŁAD: Symbole Christoffela na $\mathcal{H}$: Wyznaczyliśmy już wcześniej $\nabla_{\partial_a}\partial_a$ znamy wobec tego

$$\Gamma^a_{aa} = \frac{a(1+b^2)}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)} \qquad \Gamma^b_{aa} = \frac{b(1+b^2)}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}$$

ze względu na symetrię parametryzacji otrzymalibyśmy zapewne

$$\Gamma^b_{bb} = \frac{b(1+a^2)}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)} \qquad \Gamma^a_{bb} = \frac{a(1+a^2)}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}$$

Rachunek zmierzający do wyliczenia $\Gamma^a_{ab} = \Gamma^a_{ba}$ i $\Gamma^b_{ab} = \Gamma^b_{ba}$ trzeba wykonać oddzielnie wyznaczając np:

$$\nabla_{\partial_b}\partial_a = \frac{-ab}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}\left(a\partial_a + b\partial_b\right)$$

Widać więc wzory na brakujące współczynniki.

Wzory na współczynniki Christoffela na $\mathcal{H}$ są dość paskudne. Powstaje pytanie, czy można wybrać lepszy układ współrzędnych tak, żeby te wzory wyszły ładniejsze? Układ ten musi w jakimś sensie odzwierciedlać geometrię $\mathcal{H}$. Zajmiemy się oczywiście przypadkiem ogólniejszym, tzn takim, że $M \subset \mathbb{R}^n$, $\dim M = k = n-1$.

Jeśli M jest hiperpowierzchnią zanurzoną w $\mathbb{R}^n$, przynajmniej lokalnie mamy do dyspozycji jednostkowe pole normalne N. Trzeba tu dokonać wyboru spośród dwóch pól różniących się o znak. Dla powierzchni orientowalnych takie pole istnieje globalnie.

$\|N\| = 1 \Rightarrow D_v(N|N) = 0 = 2(D_vN\,|\,N)$ dla dowolnego $v \in T_qM$. Skoro $D_vN \perp N$ to $D_vN \in T_qM$. Mamy zatem odwzorowanie

$$A_q : T_qM \longrightarrow T_qM, \quad A_q(v) = -D_vN$$

Jest to operator liniowy. Jeśli powierzchnia jest gładka, N jest polem gładkim. Możemy więc napisać $A: TM \longrightarrow TM$. A jest gładkim endomorfizmem wiązki stycznej nad identycznością. A nazywa się operatorem Weingartena lub operatorem kształtu.

Na $\mathcal{H}$ w punkcie $q=(a,b)$ policzymy $A_q(\partial_a) = -D_{\partial_a}N$ i $A_q(\partial_b) = -D_{\partial_a}N$ pamiętając, że

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}}\left(-a\partial_x - b\partial_y + \sqrt{1+a^2+b^2}\,\partial_z\right)$$

$$\partial_a\left(\frac{a}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}}\right) = \frac{\sqrt{\cdots} - \frac{4a^2}{2\sqrt{\cdots}}}{(1+2a^2+2b^2)} = \frac{1+2b^2}{\sqrt{}^{\,3}} \qquad \partial_a\left(\frac{b}{\sqrt{}}\right) = -\frac{2ab}{\sqrt{}^{\,3}}$$

$$\partial_a\left(\frac{\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}}\right) = \frac{\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\sqrt{} - \frac{2a}{\sqrt{}}\sqrt{1+a^2+b^2}}{1+2a^2+2b^2} = \frac{a(1+2a^2+2b^2) - 2a(1+a^2+b^2)}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}^{\,3}\sqrt{1+a^2+b^2}} =$$

$$\frac{-a}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}^{\,3}\sqrt{1+a^2+b^2}} \qquad D_{\partial_a}N = \frac{1}{\sqrt{}^{\,3}}\left(-(1+2b^2)\partial_x + 2ab\,\partial_y - \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\partial_z\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}^{\,3}}\left(-(1+2b^2)\partial_a + 2ab\,\partial_b\right)$$

Po paskudnych rachunkach:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}^{\,3}} \begin{bmatrix} (1+2b^2) & -2ab \\ -2ab & (1+2a^2) \end{bmatrix}$$

Dostaliśmy macierz operatora kształtu w bazie (∂_a, ∂_b)

W powyższym przykładzie A okazał się być wyrażony symetryczną macierzą. Nie jest to przypadek

STWIERDZENIE: Operator kształtu jest samosprzężony, tzn. $g(A(v),w) = g(v, A(w))$ dla dowolnych $v, w \in TM$, $\tau_M(v) = \tau_M(w)$.

DOWÓD: Weźmy dwa dowolne pola wektorowe X, Y styczne do M, takie, że $X(q) = v$, $Y(q) = w$.

Wiadomo, że $\tilde{g}(X,N) = 0 = \tilde{g}(Y,N)$.

$$0 = D_Y(\tilde{g}(X,N)) = \tilde{g}(D_Y X, N) + \tilde{g}(X, D_Y N) = \tilde{g}(D_Y X, N) - \tilde{g}(X, A(Y))$$

$$0 = D_X(\tilde{g}(Y,N)) = \dots \qquad \dots = \tilde{g}(D_X Y, N) - \tilde{g}(Y, A(X))$$

zatem $0 = D_Y(\tilde{g}(X,N)) - D_X(\tilde{g}(Y,N)) = \tilde{g}(D_Y X, N) - \tilde{g}(D_X Y, N) - \tilde{g}(X, A(Y)) + \tilde{g}(Y, A(X)) =$

$= \tilde{g}(D_Y X - D_X Y, N) + g(Y, A(X)) - g(X, A(Y)) =$ X, Y styczne do M, więc można opuścić wężyki

$= \tilde{g}([X,Y], N) + g(Y, A(X)) - g(X, A(Y)) =$

jeśli X, Y styczne do M to ich nawias Liego też, zatem iloczyn skalarny z N daje 0

$= g(Y, A(X)) - g(X, A(Y))$

W punkcie q dostajemy

$g(w, A(v)) = g(v, A(w))$ ■

A nadaje się więc do stworzenia pewnej formy dwuliniowej symetrycznej na TM, mianowicie

$$b(v,w) = g(A(v), w)$$

Powyższa forma nosi nazwę **druga forma podstawowa**.

Skoro macierz A jest symetryczna możemy skorzystać z twierdzenia spektralnego, które mówi, że A jest diagonalizowalny, ma rzeczywiste wartości własne oraz istnieje baza złożona z ortogonalnych (ortonormalnych) wektorów własnych. Wartości własne operatora A nazywają się **krzywiznami głównymi** a wektory własne wyznaczają **kierunki główne** na powierzchni.

Wyznaczmy krzywizny główne i kierunki główne na $\mathcal{H}$ $\qquad r = \sqrt{1+2a^2+2b^2}$

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{bmatrix} \frac{+(1+2b^2)}{r^3} - \lambda & \frac{-2ab}{r^3} \\ \frac{-2ab}{r^3} & \frac{(1+2a^2)}{r^3} - \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{r^6}\left[(1+2b^2 - r^3\lambda)(1+2a^2 - r^3\lambda) - 4a^2b^2\right] =$$

$$= \frac{1}{r^6}\left[1 + 2a^2 - r^3\lambda + 2b^2 + \cancel{4a^2b^2} - 2b^2r^3\lambda - r^3\lambda - 2a^2r^3\lambda + r^6\lambda^2 - \cancel{4a^2b^2}\right] = \frac{1}{r^6}\left[r^2 + \lambda(-2r^3 - 2b^2r^3 - 2a^2r^3) + r^6\lambda^2\right] = \frac{1}{r^6}\left[r^2 + \lambda r^3(-2 - 2b^2 - 2a^2) + r^6\lambda^2\right] = \frac{1}{r^4} + \lambda\frac{1}{r^3}(-1 - r^2) + \lambda^2 = \frac{1}{r^4} - \frac{1+r^2}{r^3}\lambda + \lambda^2$$

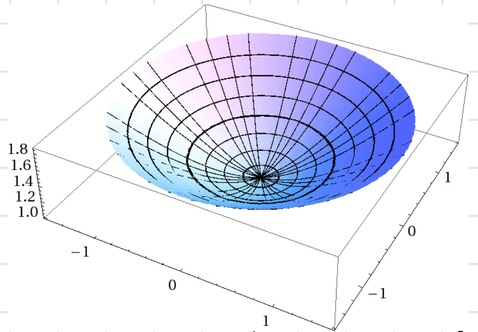
$w_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = \frac{1}{r^3}$ lub $\lambda = \frac{1}{r}$. Otrzymaliśmy więc dwie krzywizny główne

$$k_1(a,b) = \frac{1}{r^3} = \frac{1}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}^{\,3}} \qquad k_2(a,b) = \frac{1}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}}$$

Odpowiadające im kierunki główne wyznaczone są przez:

$$v_1 = a\partial_a + b\partial_b = a\partial_x + b\partial_y + \frac{a^2+b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\,\partial_z$$

$$v_2 = b\partial_a - a\partial_b = b\partial_x - a\partial_y$$



Linie do których styczne są kierunki główne nazywają się liniami krzywiznowymi. Na powierzchni $\mathcal{H}$ kierunki główne to krzywe tworzące powierzchni obrotowej jaką jest $\mathcal{H}$ oraz okręgi poziome leżące na $\mathcal{H}$. Znajomość kierunków głównych może pomóc np. w znalezieniu wygodniejszej parametryzacji powierzchni. Prawdziwe jest twierdzenie:

TWIERDZENIE Jeżeli w punkcie $q \in M$ wszystkie krzywizny główne są różne, to w otoczeniu tego punktu istnieje układ współrzędnych taki, że linie krzywiznowe są liniami współrzędnych.

Linie krzywiznowe z odpowiednią parametryzacją tworzą więc siatkę współrzędnych. na $\mathcal{H}$ jest tak wszędzie poza punktem $(0,0,1)$ – w tym punkcie dwie krzywizny są jednakowe i równe 1. Stosowna parametryzacja może wyglądać następująco

$$(\varphi,\alpha) \xmapsto{k} (\cos\varphi\,\mathrm{sh}\,\alpha,\ \sin\varphi\,\mathrm{sh}\,\alpha,\ \mathrm{ch}\,\alpha)$$

Wykład na temat powierzchni zanurzonych zakończymy wprowadzając pojęcie krzywizny Gaussa. W tym celu ustalamy $n=3$, $k=2$. Rozważamy więc dwuwymiarowe powierzchnie w $\mathbb{R}^3$.

DEFINICJA: Odwzorowaniem Gaussa nazywamy przyporządkowanie punktowi $q \in M$ punktu na sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ danego przez $N(q)$. Odwzorowanie Gaussa oznaczymy n:

$$n:\ M \ni q \longmapsto N(q) \in S^2$$

Zapiszmy odwzorowanie Gaussa dla $\mathcal{H}$ w nowej parametryzacji:

$$\partial_\varphi = -\sin\varphi\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\partial_x + \cos\varphi\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\partial_y \qquad \partial_\alpha = \cos\varphi\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\partial_x + \sin\varphi\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\partial_y + \mathrm{sh}\,\alpha\,\partial_z$$

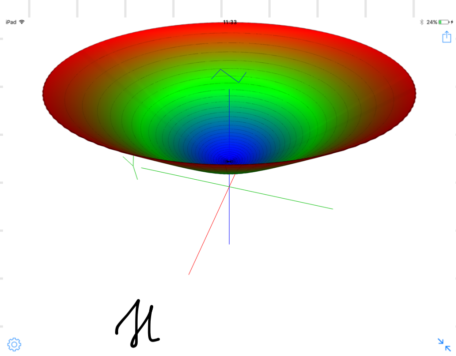
$$-N_x\sin\varphi\,\mathrm{sh}\,\alpha + N_y\cos\varphi\,\mathrm{sh}\,\alpha = 0 \implies N_x = a\cos\varphi \quad N_y = a\sin\varphi$$

$$N_x\cos\varphi\,\mathrm{ch}\,\alpha + N_y\sin\varphi\,\mathrm{ch}\,\alpha + N_z\,\mathrm{sh}\,\alpha = 0$$

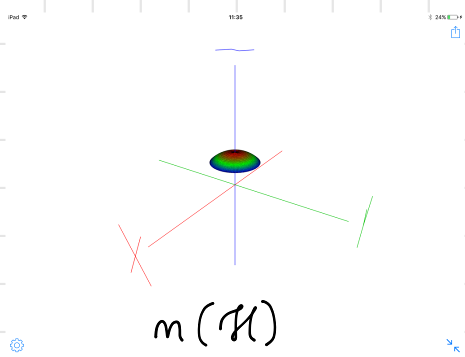
$$a\,\mathrm{ch}\,\alpha + N_z\,\mathrm{sh}\,\alpha = 0 \implies a = b\,\mathrm{sh}\,\alpha \quad N_z = -b\,\mathrm{ch}\,\alpha \qquad N \sim b\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\varphi\,\partial_x + b\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\varphi\,\partial_y - b\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\partial_z$$

$$b^2\mathrm{sh}^2\alpha + b^2\mathrm{ch}^2\alpha = 1 \qquad b^2(\mathrm{sh}^2\alpha + \mathrm{ch}^2\alpha) = 1 \qquad b^2 = 1/\mathrm{ch}\,2\alpha \qquad b = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,2\alpha}}$$

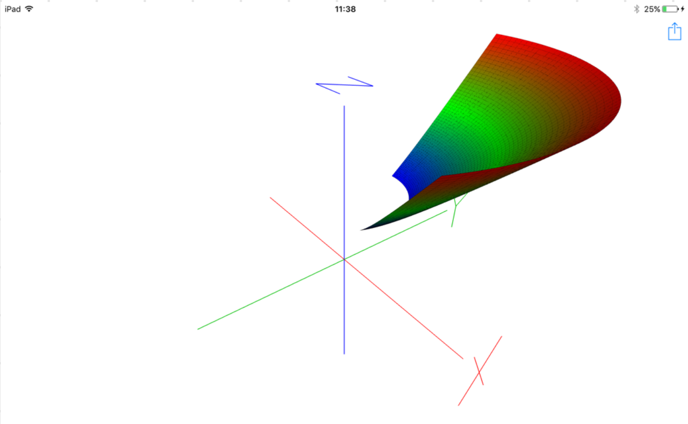
$$N(\varphi,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,2\alpha}}\left(\mathrm{sh}\,\alpha\cos\varphi\,\partial_x + \mathrm{sh}\,\alpha\sin\varphi\,\partial_y - \mathrm{ch}\,\alpha\,\partial_z\right)$$



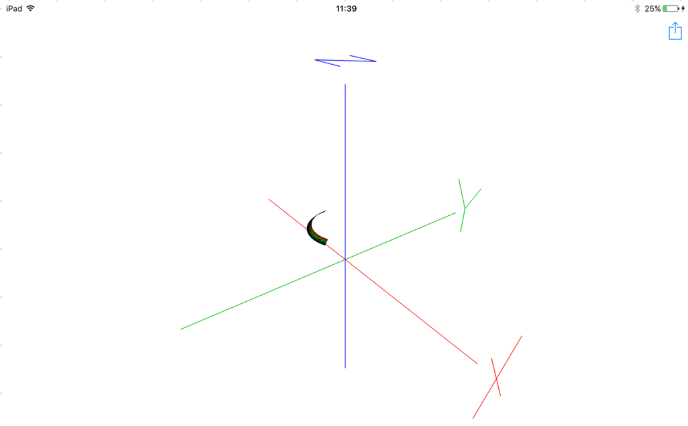
$\mathcal{H}$



$n(\mathcal{H})$



$\mathcal{H}$



$n(\mathcal{H})$

Krzywizna Gaussa – idea geometryczna: Niech O będzie otoczeniem punktu $q \in M$ w M na tyle regularnym, żeby dało się policzyć jego pole $vol(O)$. Wyznaczamy także pole $n(O)$ na S^2. Może się oczywiście zdarzyć, że $n(O)$ będzie raczej chudy, wtedy $vol(n(O)) = 0$. Z dokładnością do znaku krzywizna Gaussa jest to granica ilorazu $vol(n(O))/vol(O)$ gdy $O \to \{q\}$. Nie jest to zbyt precyzyjna definicja, ale intuicyjnie wiadomo o co chodzi. Jeśli na małym obszarze M kierunek N bardzo się zmienia krzywizna jest duża, jeśli powierzchnia jest mniej więcej płaska, krzywizna jest mała...

Od intuicji przejdźmy do sformułowania precyzyjnego. Niech $vol(v,w)$ oznacza pole równoległoboku rozpiętego na v i w. Krzywizna Gaussa K_M w punkcie $q \in M$ jest równa

$$K_M(q) = \operatorname{sgn}\det(T_q n)\,\frac{vol(T_n(v), T_n(w))}{vol(v,w)}$$

v, w trzeba wziąć liniowo niezależne oczywiście.

Użycie wyznacznika może się tu wydać wątpliwe, bo $T_q n$ działa z T_qM do $T_{n(q)}S^2$. Jednak obie przestrzenie traktowane jako podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$ są dwuwymiarowe, prostopadłe do $N(q)$ mogą więc być naturalnie utożsamione

$$vol(v,w) = \left(\det\begin{bmatrix} g(v,v) & g(v,w) \\ g(v,w) & g(w,w)\end{bmatrix}\right)^{1/2} = |\det Q|\sqrt{\det g}$$

gdzie Q jest macierzą której kolumny są wektorami v i w w ustalonej bazie

W tej samej bazie liczymy

$$vol(T_q n(v), T_q n(w)) = |\det T_q N|\,|\det Q|\sqrt{g}$$

$$K_M = \operatorname{sgn}\det T_q N\,\frac{|\det T_q N|\,\cancel{|\det Q|}\,\cancel{\sqrt{g}}}{\cancel{|\det Q|}\,\cancel{\sqrt{g}}} = \det T_q N$$

Niech teraz $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to M$ będzie taka, że $v = \gamma(0) = t\gamma(0)$ wtedy

$$T_q n(v) = t(n \circ \gamma)(0) = D_v N(q) = -A_q(v) \qquad T_q n = -A_q \qquad \det T_q N = \det A_q = k_1 k_2$$

Okazuje się więc, że krzywizna Gaussa jest iloczynem krzywizn głównych. Łatwo sprawdzić, że krzywizna sfery o promieniu R jest równa $1/R^2$, krzywizna naszej hiperboloidy $\mathcal{H}$ jest $1/r^4$

Definicja krzywizny Gaussa jest na pierwszy rzut oka „zewnętrzna" to znaczy zawiera obiekty zależne od zanurzenia. Okazuje się jednak, że jest to wielkość całkowicie „wewnętrzna". Zachodzi bowiem twierdzenie

TWIERDZENIE (Theorema Egregium) Jeśli $f: M \to N$ jest izometrią to $K_M(q) = K_N(f(q))$

Do udowodnienia tego twierdzenia w prosty i jednocześnie dający pewną dodatkową interpretację sposób gotowi będziemy za kilka wykładów.