GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II

WYKŁAD 3: Pochodna Liego

MARIUS SOPHUS LIE

17.12.1842 – 18.02.1899

GEOMETRIA II WYKŁAD 3 POCHODNA LIEGO

W geometrii różniczkowej interesuje nas często jak dane pole tensorowe zmienia się od punktu do punktu na rozmaitości. Tzn. zazwyczaj chodzi o kierunki w których się nie zmienia. Zauważmy jednak, że powyższe zdanie nie mają sensu jeśli nie sprecyzujemy sposobu porównywania wartości pola tensorowego w różnych punktach. Na „gołej" rozmaitości przestrzenie styczne w różnych punktach i przestrzenie kostyczne w różnych punktach są co prawda izomorficzne (jak wszystkie p.w. tego samego wymiaru) ale nie kanonicznie. Tak jak wiadomo co to jest funkcja stała na M tak nie wiadomo co to jest pole wektorowe stałe na M. Żeby można było porównywać wartości w różnych punktach potrzebna jest dodatkowa struktura. Może to być koneksja (inaczej powiązanie), może to też być pole wektorowe wzdłuż którego różniczkujemy. Ten drugi sposób to właśnie pochodna Liego.

DEFINICJA: Odwzorowanie różniczkowalne $\varphi: \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ nazywamy **jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów** jeśli spełnione są warunki

(1) $\forall q\in M \quad \varphi(0,q)=q$ (2) $\forall q\in M \ \forall t,s\in\mathbb{R} \quad \varphi(t,\varphi(s,q))=\varphi(t+s,q)$

Notacja $\varphi(t,\cdot)=\varphi_t$, warunek (2): $\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_{t+s}$, warunek (1) $\varphi_0=id_M$. Z warunku (2) wynika, że φ_t jest dyfeomorfizmem. Istotnie

$\varphi_t\circ\varphi_{-t}=\varphi_0=id_M$, tzn $\varphi_t^{-1}=\varphi_{-t}$, ponadto φ_{-t} jest z tej samej rodziny więc jest różniczkowalne. Jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów zadaje pole wektorowe

$$X^\varphi(q)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t(q)$$

Notacja: wektor styczny do krzywej $\gamma:\mathbb{R}\to M$ w punkcie t_0 oznaczać będziemy $\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\gamma(t)$ lub $t\gamma(t_0)$.

Zauważmy, że ze względu na warunek (2) pole X^φ jest niezmiennicze ze względu na φ_t, tzn $T\varphi_t(X^\varphi(q))=X^\varphi(\varphi_t(q))$. Istotnie, $T\varphi_t(X^\varphi(q))$ jest wektorem stycznym do krzywej $s\longmapsto\varphi_t(\varphi_s(q))=\varphi_{s+t}(q)$. Wektor $X^\varphi(\varphi_t(q))$ jest zaś styczny do $s\longmapsto\varphi_s(\varphi_t(q))=\varphi_{s+t}(q)$.

DEFINICJA: Lokalną jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów nazywamy odwzorowanie $\varphi:\Omega\to M$ gdzie $\Omega\subset\mathbb{R}\times M$ jest otwarty i $\{0\}\times M\subset\Omega$ dla którego spełnione są warunki (1) i (2) z poprzedniej definicji. Warunek (2) spełniony jest gdy $(t,q),(s,\varphi(t,q))$ $(s+t,q)$ należą do Ω. Lokalna grupa dyfeomorfizmów także definiuje pole wektorowe gdyż do wyznaczenia wektora stycznego wystarczą krzywe sparametryzowane otoczeniem zera.

TWIERDZENIE: Gładkie pole wektorowe X na M definiuje lokalną grupę dyfeomorfizmów φ^X taką, że $X(q)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi^X_t(q)$.

Dowód oparty jest na tw. Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego oraz twierdzenie o zależności rozwiązania od warunków początkowych. W układzie współrzędnych pole wektorowe X ma postać $X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$. Równanie na krzywe całkowe $t\longmapsto x^i(t)$ ma postać

$$X^i(x(t))=\frac{dx^i}{dt}.$$

Jest to układ równań różniczkowych na $\mathbb{R}^n$. Z tw. Cauchy'ego wiadomo, że istnieje rozwiązanie $]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t\longmapsto\varphi^i_t(q)$ z warunkiem początkowym $\varphi^i_0(q)=x^i(q)$. Z jednoznaczności rozwiązania wynika, że $\varphi_t(\varphi_s(q))=\varphi_{s+t}(q)$ jeśli tylko wszystkie napisy mają sens. Z tw. o zależności od warunków początkowych wynika, że dla każdego q istnieje odcinek $I_q\subset\mathbb{R}$, $0\in I_q$ i otoczenie $\mathcal{O}_q\subset M$ $q\in\mathcal{O}_q$ takie, że rozwiązanie z warunkiem początkowym $(s,p)\in I_q\times\mathcal{O}_q$ istnieje dla czasu z odcinka $]s-\varepsilon,s+\varepsilon[$ oraz ε nie zależy od p i s. Oznacza to że Ω można wziąć $\Omega=\bigcup_q I_q\times\mathcal{O}_q$. Z tw o zależności od warunków początkowych wynika też, że φ jest różniczkowalne. ■

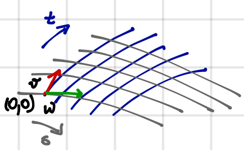
Lokalna grupa dyfeomorfizmów związana z polem X służyć będzie do przenoszenia wartości pola tensorowego do jednego punktu. Np niech α będzie jednoformą na M, X polem a φ odpowiednią lokalną grupą dyfeomorfizmów.

$$t\longmapsto(\varphi_t^*\alpha)(q) \quad \text{jest krzywą w } T_q^*M$$

Ma więc sens definicja

DEFINICJA $$(\mathcal{L}_X\alpha)(q)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(\varphi_t^*\alpha(q)-\alpha(q)\right)$$

Z samej definicji wynikają własności $\mathcal{L}_X(\alpha+\beta)=\mathcal{L}_X\alpha+\mathcal{L}_X\beta$ oraz dla $\lambda\in\mathbb{R}$ $\mathcal{L}_X\lambda\alpha=\lambda\mathcal{L}_X\alpha$. Definicja jest dość mało praktyczna spróbujemy znaleźć wygodny rachunkowy wzór na $\mathcal{L}_X\alpha$. Skorzystamy tu z wygodnego wzoru na różniczkę jednoformy zwanego wzorem Tułczyjewa. Żeby znać $d\alpha$ trzeba wiedzieć jak $d\alpha$ działa na dwa wektory w TM zaczepione w dowolnym punkcie. Niech więc $v,w\in T_qM$. Weźmy też dowolne $\chi:\mathbb{R}^2\to M$ takie, że v jest styczny do krzywej $t\longmapsto\chi(t,0)$ a w do krzywej $s\longmapsto\chi(0,s)$.

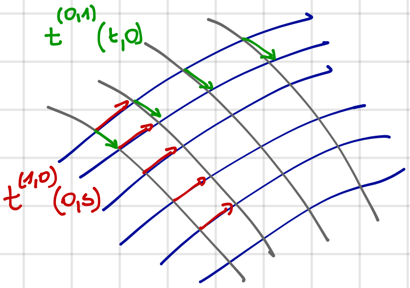


Używać będziemy oznaczeń $t^{(0,1)}\chi(t,s)$ jest to wektor styczny do krzywej

$$\tau\longmapsto\chi(t,s+\tau) \quad w\ \tau=0$$

Podobnie $t^{(1,0)}\chi(t,s)$ to wektor styczny do krzywej $\tau\longmapsto\chi(t+\tau,s)$ w $\tau=0$.

$$d\alpha(v,w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \alpha(\chi(t,0)), t^{(0,1)}(t,0)\rangle - \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\langle \alpha(\chi(0,s)), t^{(1,0)}(0,s)\rangle$$



Niezależność wyniku od wyboru χ wynika z symetrii drugich pochodnych cząstkowych. Niech α i χ będą gładkie (albo przynajmniej C^2). Wtedy w układzie współrzędnych (x^i) w otoczeniu q mamy

$\chi(s,t) = \chi^i(t,s)$ $\alpha = \alpha_i(x)dx^i$

$w = w^i\partial_i$ $v = v^i\partial_j$

*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle \alpha(\chi(t,0)), t^{(0,1)}\chi(t,0)\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_i(\chi^j(t,0))\frac{\partial \chi^i}{\partial s}(t,0) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k}\frac{\partial \chi^k}{\partial t}(0,0)\frac{\partial \chi^i}{\partial s}(0,0)$$

$$+ \alpha_i(\chi^j(0,0))\frac{\partial^2\chi^i}{\partial t\partial s}(0,0) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k}(q)v^i w^k + \alpha_i(q)\frac{\partial^2\chi^i}{\partial t\partial s}(0,0)$$

**

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\langle \alpha(\chi(0,s)), t^{(1,0)}\chi(0,s)\rangle = \frac{d}{ds}\alpha_i(\chi^j(0,s))\frac{\partial\chi^i}{\partial t}(0,s) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k}\frac{\partial \chi^k}{\partial s}(0,0)\frac{\partial\chi^i}{\partial t}(0,0) +$$

$$+ \alpha_i(\chi^j(0,0))\frac{\partial^2\chi^i}{\partial s\partial t}(0,0) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k}(q)w^k v^i + \alpha_i(q)\frac{\partial^2\chi^i}{\partial s\partial t}(0,0)$$

$$* - ** = \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k}v^i w^k - \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k}w^i v^k = d\alpha(v,w)$$

Wracamy do pochodnej Liego formy α. Jako rachunek pomocniczy obliczmy $d\alpha(X(q),v)$ dla dowolnego $v\in T_qM$ korzystając ze wzoru Tułczyjewa:
W tym celu weźmy dowolną krzywą $\gamma: \mathbb{R}\to M$ $\gamma(0)=q$ $\dot\gamma(0)=v$. Jako $\chi(t,s)$ możemy użyć $\chi(t,s) = \varphi_t(\gamma(s))$

Mamy oczywiście $t^{(1,0)}\chi(0,0) = X(q)$ $t^{(0,1)}\chi(0,0) = v$, mamy także

$t^{(1,0)}\chi(0,s) = X(\gamma(s))$ $t^{(0,1)}\chi(t,0) = T\varphi_t(v)$

$$d\alpha(X(q),v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle \alpha(\varphi_t(q)), T\varphi_t(v)\rangle - \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\langle\alpha(\gamma(s)), X(\gamma(s))\rangle =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle \varphi_t^*\alpha(q), v\rangle - \underset{\langle d\langle\alpha,X\rangle, v\rangle}{\underset{\parallel}{v\langle\alpha,X\rangle}}$$

$d\alpha(X(q),v) = \langle \mathcal{L}_X\alpha, v\rangle - \langle d\langle\alpha,X\rangle, v\rangle$ z dowolności v:

$$\mathcal{L}_X\alpha = d\alpha(X,\cdot) + d\langle\alpha,X\rangle =$$

$$= i_X d\alpha + d i_X\alpha$$ Wzór obowiązuje dla dowolnej 1-formy tzn

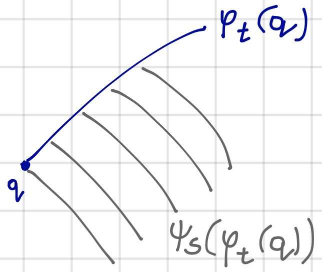
$$\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X$$

Pochodna Liego na 1-formach jest więc antykomutatorem dwóch różniczkowań: zewnętrznego d i wewnętrznego i_X. Tak naprawdę jest to komutator w wersji gradowanej (o tym dwa słowa później)

Wróćmy na moment do wzoru Tulczyjewa. Przypomnę on nieco inny wzór na różniczkę formy, mianowicie wzór Cartana. Jeśli α jest 1-formą a X, Y polami wektorowymi na M to

$$d\alpha(X,Y) = X\langle \alpha, Y\rangle - Y\langle \alpha, X\rangle - \alpha([X,Y])$$

pierwszy i drugi człon tego wzoru przypominają pierwszy i drugi człon wzoru Tulczyjewa. Trzeciego natomiast we wzorze Tulczyjewa nie ma... Jak mają się do siebie te dwa wzory? Niech φ_t będzie potokiem pola X a ψ_s potokiem pola Y. Mamy wtedy $X\langle \alpha, Y\rangle(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \alpha(\varphi_t(q)), Y(\varphi_t(q))\rangle$ wektor $Y(\varphi_t(q))$ to $t^{(0,1)}\chi(t,0)$ dla $\chi(t,s) = \psi_s(\varphi_t(q))$



Natomiast

$$Y\langle \alpha, X\rangle(q) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \alpha(\psi_s(q)), X(\psi_s(q))\rangle,$$ wektor

$X(\psi_s(q))$ to $t^{(1,0)}\bar{\chi}(0,s)$ dla $\bar{\chi}(t,s) = \varphi_t(\psi_s(q))$

Pierwsze dwa człony we wzorze Cartana odpowiadają członom we wzorze Tulczyjewa tyle, że dla χ i $\bar{\chi}$ a więc dla dwóch różnych odwzorowań $\mathbb{R}^2 \to M$. Ogólnie rzecz biorąc te odwzorowania są zgodne tylko dla $s=0$ lub $t=0$. Miarą braku zgodności na poziomie infinitezymalnym jest właśnie $[X,Y]$, który pojawia się w trzecim członie wzoru Cartana.

Mając wzór $\mathcal{L}_X\alpha = i_X d\alpha + d i_X \alpha$ możemy na przykład zadziałać $\mathcal{L}_X$ na $f\alpha$ gdzie f jest funkcją i zobaczyć co wyjdzie

$$\mathcal{L}_X(f\alpha) = i_X d(f\alpha) + d\, i_X(f\alpha) = i_X(df\wedge\alpha + f\,d\alpha) + d(f\, i_X\alpha) = (i_X df)\alpha - (i_X\alpha)df + f\, i_X d\alpha + i_X\alpha\, df + f\, d(i_X\alpha) = (Xf)\alpha + f(i_X d\alpha + d\, i_X\alpha) = (Xf)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha$$

Gdybyśmy zatem przyjęli $\mathcal{L}_X f = Xf$ mielibyśmy wzór $\mathcal{L}_X(f\alpha) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha$ czyli coś w rodzaju reguły Leibniza dla pochodnej Liego.

Definicja $\mathcal{L}_X f := Xf$ ma sens gdyż

$$(Xf)(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\varphi_t(q)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\varphi_t^* f(q) - f(q)\right)$$ wzór jest więc zgodny z ideą pochodnej Liego.

Mamy już pochodną Liego na 0-formach i 1-formach, pora rozszerzyć to pojęcie na k-formy. Formalnie rzecz biorąc definicja jest taka sama

$$\omega\in\Omega^k(M) \quad \mathcal{L}_X\omega(q) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\varphi_t^*\omega(q) - \omega(q)\right)$$

Użyjmy definicji do obliczenia $\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta)$

$$\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\varphi_t^*(\alpha\wedge\beta) - \alpha\wedge\beta\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\varphi_t^*\alpha)\wedge(\varphi_t^*\beta) - (\varphi_t^*\alpha)\wedge\beta + \varphi_t^*\alpha\wedge\beta - \alpha\wedge\beta\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\varphi_t^*\alpha\wedge(\varphi_t^*\beta-\beta) + (\varphi_t^*\alpha-\alpha)\wedge\beta\right) = \lim_{t\to 0}\left[\varphi_t^*\alpha\wedge\left(\frac{\varphi_t^*\beta-\beta}{t}\right) + \left(\frac{\varphi_t^*\alpha-\alpha}{t}\right)\wedge\beta\right]$$

$$= \alpha\wedge\mathcal{L}_X\beta + (\mathcal{L}_X\alpha)\wedge\beta$$

$$\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta) = (\mathcal{L}_X\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge\mathcal{L}_X\beta$$

Pochodna Liego spełnia więc regułę Leibniza, innymi słowy jest to różniczkowanie algebry zewnętrznej form różniczkowych. Z reguły Leibniza wynika też, że wzór wyrażający $\mathcal{L}_X$ przez i_X i d obowiązuje także dla k-form:

$$\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta) = (\mathcal{L}_X\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(\mathcal{L}_X\beta) = \left(i_X d\alpha + d(i_X\alpha)\right)\wedge\beta + \alpha\wedge\left(i_X d\beta + d(i_X\beta)\right) =$$

$$= (i_X d\alpha)\wedge\beta + d(i_X\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(i_X d\beta) + \alpha\wedge d(i_X\beta)$$

$$i_X d(\alpha\wedge\beta) = i_X(d\alpha\wedge\beta - \alpha\wedge d\beta) = i_X(d\alpha)\wedge\beta + (i_X\beta)d\alpha - (i_X\alpha)d\beta + \alpha\wedge(i_X d\beta)$$

$$d(i_X(\alpha\wedge\beta)) = d\left((i_X\alpha)\beta - (i_X\beta)\alpha\right) = d(i_X\alpha)\wedge\beta + (i_X\alpha)d\beta - d(i_X\beta)\wedge\alpha - (i_X\beta)d\alpha$$

$$+ \quad = i_X(d\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge i_X d\beta + d(i_X\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge d(i_X\beta)$$

$$\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta) = i_X d(\alpha\wedge\beta) + d\, i_X(\alpha\wedge\beta)$$

Indukcyjnie otrzymujemy wniosek: Na formach (dowolnego rzędu)

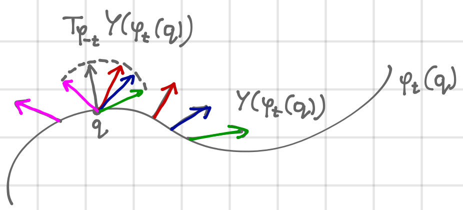
$$\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X = \{i_X, d\}$$

Podsumujmy własności pochodnej Liego k-formy przy pomocy stwierdzenia

STWIERDZENIE (1) Pochodna Liego k-formy jest k-formą (2) Pochodna Liego jest operacją liniową, tzn dla $a, b\in\mathbb{R}$ $\mathcal{L}_X(a\alpha + b\beta) = a\mathcal{L}_X\alpha + b\mathcal{L}_X\beta$ (3) Pochodna Liego spełnia regułę Leibniza

$$\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta) = (\mathcal{L}_X\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(\mathcal{L}_X\beta) \qquad (4)\quad \mathcal{L}_X = \{d, i_X\}$$

Pozostaje stwierdzić jak pochodna Liego działa na pola wektorowe. Zapiszmy definicję zgodnie z ideą



Wartości pola Y wzdłuż krzywej całkowej $t \mapsto \varphi_t(q)$ pola X ściągamy do punktu q przy pomocy dyfeomorfizmów z rodziny φ_t. Dostajemy krzywą

$$t \longmapsto T\varphi_{-t}\big(Y(\varphi_t(q))\big)$$

wektorów w T_qM. Tę krzywą różniczkujemy

$$(\mathcal{L}_X Y)(q) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(T\varphi_t\big(Y(\varphi_t(q))\big) - Y(q)\Big)$$

STWIERDZENIE

$$\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$$

DOWÓD

Pole wektorowe to różniczkowanie algebry $C^\infty(M)$. Możemy więc badać $\mathcal{L}_X Y$ patrząc jak działa ono na funkcje

$$[(\mathcal{L}_X Y)f](q) = \mathcal{L}_X(Y)(q)f = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[T\varphi_t\big(Y(\varphi_t(q))\big)f - Y(q)f\Big] =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\underbrace{T\varphi_{-t}\big(Y(\varphi_t(q))\big)f - Y(\varphi_t(q))f}_{} + \underbrace{Y(\varphi_t(q))f - Y(q)f}_{}\Big] = *$$

$$\frac{1}{t}\Big[Y(\varphi_t(q))f - Y(q)f\Big] = \frac{1}{t}\Big[(Yf)(\varphi_t(q)) - (Yf)(q)\Big] \xrightarrow[t\to 0]{} X(q)(Yf)$$

$$\frac{1}{t}\Big[T\varphi_{-t}\big(Y(\varphi_t(q))\big)f - Y(\varphi_t(q))f\Big] = \underset{\substack{\downarrow \\ Y(q)}}{Y(\varphi_t(q))}\left[\frac{f\circ\varphi_{-t} - f}{t}\right] \xrightarrow[t\to 0]{} Y(q)(-Xf)$$

$$* = X(q)(Yf) + Y(q)(-Xf) = ([X,Y]f)(q) \qquad \blacksquare$$