GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II

WYKŁAD 5: KONEKSJA LINIOWA
POCHODNA KOWARIANTNA

GEOMETRIA II WYKŁAD 5 KONEKSJA W WIĄZCE WEKTOROWEJ 1

26 IV, 5 V, 10 V

Przypomnijmy (albo podajmy?) definicję wiązki wektorowej

DEFINICJA Wiązką wektorową nazywamy układ (E, M, ρ) gdzie E, M są rozmaitościami $\rho: E \to M$ jest surjektywną submersją taką, że istnieje pokrycie otwarte $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A}$ rozmaitości M i układ dyfeomorfizmów $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ takich, że

$$\varphi_\alpha : \rho^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{O}_\alpha \times \mathbb{R}^n \quad \text{oraz jeśli} \quad \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset \quad \text{to} \quad \forall x \in \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

jest liniowym izomorfizmem. $\dim M = m$, $\dim E = m+n$

Zbiór $E_x = \rho^{-1}(x)$ jest więc przestrzenią wektorową. Układ (φ_α) nazywamy lokalnymi trywializacjami wiązki. Czasami zamiast $\mathbb{R}^n$ wpisuje się dowolną ustaloną przestrzeń wektorową V. V nazywa się wtedy włóknem typowym wiązki. Każde włókno E_x jest wówczas izomorficzne (niekanonicznie) V. Koncepcyjnie różnica jest nieduża, bo skończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe są (niekanonicznie) izomorficzne $\mathbb{R}^n$.

PRZYKŁADY: WIĄZKA STYCZNA: Jako E bierzemy TM, jako $\rho = \tau_M$ tzn. $\tau_M : TM \to M$. Wybierając pokrycie $(\mathcal{O}_\alpha)$ dziedzinami układów współrzędnych definiujemy, dla układu (x^i) w $\mathcal{O}_\alpha$ odwzorowanie

$$\tau_M^{-1}(\mathcal{O}) \ni v \xmapsto{\varphi_\alpha} (\tau_M(v), v^1, \dots, v^m) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^m \quad \text{gdzie} \quad v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Zamiana zmiennych w wyrażeniach opisujących wektory styczne jest liniowym izomorfizmem, więc warunki są spełnione.

WIĄZKA KOSTYCZNA: Jako E bierzemy T^*M, jako $\rho = \pi_M$, tzn. $\pi_M : T^*M \to M$. Wybierając pokrycie ••• j.w.

$$\pi_M^{-1}(\mathcal{O}) \ni \omega \longmapsto (\pi_M(\omega), \omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^m \quad \text{gdzie} \quad \omega = \omega_1 dx^1 + \dots + \omega_m dx^m$$

Zauważmy, że lokalne trywializacje pozwalają wprowadzić w $\rho^{-1}(\mathcal{O}_\alpha)$ układ współrzędnych zgodny ze strukturą przestrzeni wektorowej. Weźmy dowolną dziedzinę mapy $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_\alpha$. Współrzędne w $\mathcal{U}$ oznaczmy $(x^i)_{i=1}^m$. Wtedy φ_α działa w $\rho^{-1}(\mathcal{U})$

$$\varphi_\alpha|_{\rho^{-1}(\mathcal{U})} : \rho^{-1}(\mathcal{U}) \ni e \longmapsto (\rho(e), y^1(e) \dots y^n(e))$$

$e \longmapsto (x^i(\rho(e)), y^a(e))$ jest układem współrzędnych w $\rho^{-1}(\mathcal{U})$. Współrzędne y^a są liniowe w tym sensie, że $y^a(e+e') = y^a(e) + y^a(e')$ $\quad y^a(\lambda e) = \lambda y^a(e)$

Współrzędne $(x^i, \dot{x}^j)$ w TM i (x^i, p_j) w T^*M są właśnie tego rodzaju. W wiązkach wektorowych używa się w zasadzie jedynie współrzędnych zgodnych ze strukturą. Zamiana zmiennych jest postaci $\tilde{x}^i = \varphi^i(x)$ $\quad \tilde{y}^a = \Lambda^a{}_b(x)\, y^b$, tzn. jest liniowa w zmiennych we włóknie. Macierz $\Lambda^a{}_b(x)$ zależy od x^i

ZASKAKUJĄCE WŁASNOŚCI WIĄZKI STYCZNEJ DO WIĄZKI WEKTOROWEJ:

Rozważmy dowolną wiązkę wektorową $\varrho: E \to M$. Współrzędne zgodne ze strukturą oznaczymy (x^i, y^a). Weźmy TE. Oczywiście TE jest wiązką wektorową nad E. Stosowne współrzędne to $(x^i, y^a, \dot{x}^i, \dot{y}^a)$, tzn element v zaczepiony w e możemy opisać podając $(x^i(e), y^a(e), \dot{x}^i(v), \dot{y}^a(v))$ $\quad x^i(e) = x^i(\varrho(e))$

$$v = \dot{x}^i(v)\frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^a(v)\frac{\partial}{\partial y^a}$$

$2(n+m)$ współrzędnych.

Mamy oczywiście $\dot{x}^i(v+w) = \dot{x}^i(v) + \dot{x}^i(w)$, $\dot{y}^a(v+w) = \dot{y}^a(v) + \dot{y}^a(w)$ podobnie dla λv.

Okazuje się, że w TE jest wiązką wektorową na jeszcze jeden sposób. Odwzorowanie $T\varrho$ $T\varrho: TE \to TM$ jest surjektywną submersją. Włókno nad $u \in T_xM$ składa się z wektorów v zaczepionych w punktach włókna E_x i rzutujących się na u.

zmienia się wzdłuż włókna

$$v: (x^i, y^a, \dot{x}^i, \dot{y}^a)$$

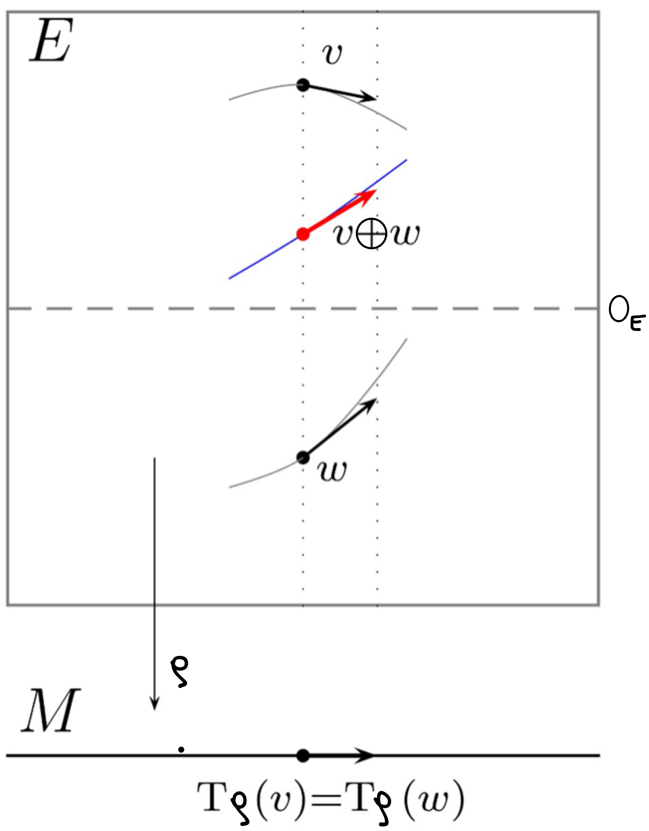
ustalone

Skąd bierze się struktura wektorowa w $(T\varrho)^{-1}(u)$? Okazuje się, że jeśli v, w mają ten sam rzut na TM to istnieją krzywe γ_v, γ_w takie, że $\dot{\gamma}_w(0) = w$ $\dot{\gamma}_v(0) = v$ i $\varrho \circ \gamma_w = \varrho \circ \gamma_v = \gamma$. Oznacza to, że $\gamma_w(t)$ i $\gamma_v(t)$ są w tym samym włóknie $E_{\gamma(t)}$, więc można je dodać

$$t \mapsto \gamma_v(t) + \gamma_w(t)$$

wektor styczny do tej krzywej to $v \oplus w$

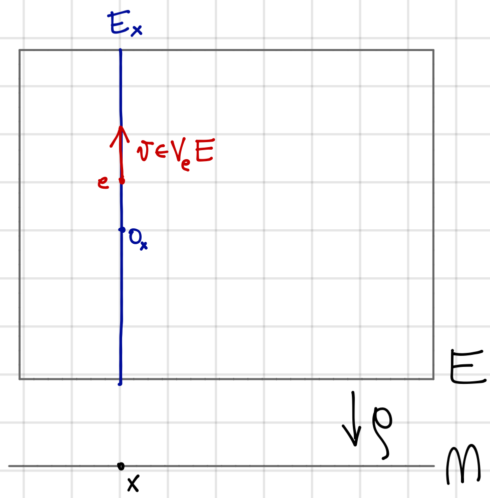
Mnożenie przez liczbę realizujemy biorąc $\lambda \odot w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \lambda\gamma_w(\cdot)$



W przestrzeni totalnej wiązki TE wyróżnione są tzw. **wektory pionowe**, tzn. rzutujące się na wektor zerowy w TM przy pomocy $T\rho$

$$VE := \{ v \in TE : \ T\rho(v) = 0 \}$$

Wektory pionowe są styczne do włókna wiązki $E \to M$



Ponieważ E_x jest przestrzenią wektorową, to każdy wektor styczny można utożsamić z elementem E_x, tzn.

$$T_e(E_x) \simeq E_x \quad \text{i dalej} \quad VE \simeq E \times_M E$$

Każdy element VE odpowiada pewnej parze (e,f) elementów tego samego włókna. Każdy element $v \in VE$ jest bowiem styczny do pewnej krzywej $t \longmapsto e + tf$.

Cała przestrzeń TE nie ma struktury iloczynu kartezjańskiego, tzn. nie da się „oddzielić" wektora stycznego od punktu zaczepienia. Dla wektorów pionowych można to zrobić. Zauważmy także że o ile w T_eE wyróżniona jest podprzestrzeń V_eE wektorów pionowych o tyle żadna z dopełniających wyróżniona nie jest. Nie ma więc „wektorów poziomych". Wyróżnienie w każdej przestrzeni T_eE podprzestrzeni dopełniającej do V_eE to właśnie **koneksja** w **wiązce** $E \to M$.

DEFINICJA: **Koneksją** w wiązce $E \to M$ nazywamy dystrybucję H na E taką że w każdym punkcie $e \in E$ mamy $T_eE = V_eE \oplus H_e$, tzn. H_e jest dopełniająca do V_eE. H nazywamy dystrybucją horyzontalną, H_e przestrzenią wektorów horyzontalnych.

???

Koneksję nazywać będziemy **liniową** jeśli jest ona zgodna ze strukturą wiązki wektorowej

Co to właściwie znaczy

Zgodność koneksji ze strukturą wiązki wektorowej wypowiedzieć można na wiele sposobów. Przedyskutujmy dwa z nich:

(1) Z użyciem dwóch struktur wiązki wektorowej w TE: Rozkład przestrzeni wektorowej W na sumę prostą $W = V \oplus H$ oznacza istnienie rzutów na V wzdłuż H i na H wzdłuż V. Na poziomie zbiorów mamy odwzorowanie $T_eE \longrightarrow V_eE \times H_e$. Uwzględniając izomorfizm $T_eE \simeq E_x$, $x = \rho(e)$ mamy $T_eE \longrightarrow E_x \times H_e$. Każda z przestrzeni H_e jest izomorficzna z T_xM (izomorfizm to $T\rho$ obcięte do H_e). Mamy więc $T_eE \longrightarrow E_x \times T_xM$. Zbierając punkt po punkcie w E otrzymujemy

$$\Gamma : TE \longrightarrow \underbrace{E}_{\text{punkt zaczepienia}} \times_M \underbrace{E}_{\text{część pionowa}} \times_M \underbrace{TM}_{\text{część pozioma}}$$

Podsumowując, dystrybucja horyzontalna H definiuje odwzorowanie (dyfeomorfizm)

$$\Gamma: TE \longrightarrow E \times_M E \times_M TM$$

Powiedzieliśmy już, że w TE są dwie struktury wiązki wektorowej $\tau_E: TE \to E$; $T\rho: TE \to TM$. Po prawej stronie, w iloczynie kartezjańskim też mamy dwie struktury:

$$pr_2: E \times_M E \times_M TM \longrightarrow E \qquad pr_3: E \times_M E \times_M TM \longrightarrow TM$$

$$(e, \underbrace{f, u}_{}) \qquad\qquad (\underbrace{e, f}_{}, u)$$

operacje wektorowe tu   operacje wektorowe tu

Warunek liniowości koneksji wypowiedzieć można następująco: Γ jest liniowe ze względu na obie struktury wektorowe w dziedzinie i obrazie. Przyjrzyjmy się temu dokładnie we współrzędnych. Weźmy układ (x^i, y^a) w E zgodny ze strukturą. Element TE opisujemy więc podając $(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b)$. Odwzorowanie Γ w ogólności zapiszemy więc przy pomocy funkcji:

$$(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b) \longmapsto \Big(\underbrace{\overbrace{A^i(x,y,\dot{x},\dot{y})}^{}, B^a(x,y,\dot{x},\dot{y})}_{pr_1}, \overbrace{C^b(x,y,\dot{x},\dot{y}), D^j(x,y,\dot{x},\dot{y})}^{pr_3}\Big)$$

Z definicji Γ wynika, że Γ jest nad identycznością w M tzn $A^i(x,y,\dot{x},\dot{y}) = x^i$. Każda z przestrzeni stycznych T_eE rozkładana jest oddzielnie, Γ jest więc też identycznością nad E niebieskim, tzn $B^a(x,y,\dot{x},\dot{y}) = y^a$. Identyfikacja T_xM z H_e zachodzi przy pomocy $T\rho$, tzn $D^j(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \dot{x}^j$. Mamy więc

$$(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^a) \xrightarrow{\ \Gamma\ } (x^i, y^a, C^b(x,y,\dot{x},\dot{y}), \dot{x}^j)$$

Ciekawe rzeczy dzieją się więc w C^b. Γ ma być liniowe ze względu na strukturę wektorową we włóknach nad E:

$$\begin{array}{ccc} (x^i, y^a, \dot{x}^i, \dot{y}^j) & \longmapsto & (x^i, y^a, \overbrace{C^b(x,y,\dot{x},\dot{y}), \dot{x}^j}^{}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x^i, y^a) & & (x^i, y^a) \end{array}$$

musi być liniowe ze względu na $\dot{x}, \dot{y}$

$$C^b = C^b_i(x,y)\dot{x}^i + C^b_a(x,y)\dot{y}^a$$

Dodatkowo rozkład wektora pionowego $(x^i, y^a, 0, \dot{y}^j)$ powinien dawać $(x^i, y^a, \dot{y}^b, 0)$ czyli być w zasadzie identycznością, tzn

$$C^b(x,y,0,\dot{y}) = \dot{y}^b \quad , \text{tzn} \quad C^b_a(x,y) = \delta^b_a$$

Stan na teraz:

musi być liniowe ze względu na $y, \dot{y}$

$$\begin{array}{ccc} (x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b) & \longrightarrow & (x^i, y^a, \overbrace{C^b_i(x,y)\dot{x}^i + \dot{y}^b}^{}, \dot{x}^j) \\ \downarrow T\rho & & \downarrow pr_3 \\ (x^i, \dot{x}^j) & & (x^i, \dot{x}^j) \end{array}$$

$$C^b_i(x,y) = C^b_{ia}(x)y^a$$

Ostatecznie $\Gamma : TE \longrightarrow E \times_M E \times_M TM$

$$(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b) \longmapsto (x^i, y^a, \Gamma^b_{ja}(x)\,\dot{x}^j y^a + \dot{y}^b, \dot{x}^j)$$

Symbole Christoffela

W ustalonym układzie współrzędnych funkcje $\Gamma^b_{ja} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ całkowicie charakteryzują koneksję liniową.

(2) Z użyciem pola Eulera. Struktura wiązki wektorowej w $E \to M$ definiuje kanoniczne pionowe pole wektorowe na E zwane polem Eulera. Wartość tego pola w punkcie $e \in E$ to wektor styczny do krzywej $t \longmapsto e + te$. We współrzędnych (x^i, y^a) pole to ma postać

$$\nabla_E(x,y) = y^a \frac{\partial}{\partial y^a}$$

Pole to jest bardzo ważną częścią struktury wiązki. W pewnym sensie zawiera pełną informację o strukturze wiązki wektorowej. Zadanie do samodzielnego opracowania:
Sprawdzić, że koneksja Γ w wiązce wektorowej jest liniowa wtedy i tylko wtedy gdy jest zachowywana przez potok pola Eulera. Warunkiem koniecznym jest znikanie pochodnej Liego horyzontalnych pól wektorowych definiujących koneksję. Jak wygląda przestrzeń horyzontalna koneksji liniowej na cięciu zerowym, tzn H_{0_x} jeśli $0_x \in E$ jest zerem przestrzeni E_x.

PRZYKŁAD: Niech M będzie powierzchnią 2-wymiarową zanurzoną w $\mathbb{R}^3$. (Przykład działa dla dowolnego k (powierzchnia) i m (przestrzeń), ale dobrze jest myśleć o konkretnym przykładzie). Spróbujmy wprowadzić w TM koneksję liniową związaną z zanurzeniem w $\mathbb{R}^3$ (z kanonicznym iloczynem skalarnym)

Zauważmy, że $T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ – wiązka styczna jest trywialna. Jeśli jednak M nie jest płaszczyzną TM nie jest trywialne. Czasami jest trywializowalna, ale żadna trywializacja nie jest wyróżniona. Załóżmy, że $M = F^{-1}(0)$, $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki tw. o maksymalnym rzędzie. W punkcie $x \in M$ T_xM jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$ spełniającą warunek $T_xM = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \langle F'(x), v \rangle = 0$ i.e. $T_xM = \ker F'(x)$. Ostatecznie więc

$$TM = \underbrace{\{ (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \ F(x) = 0 \ \text{i} \ v \in \ker F'(x) \}}_{=E}$$

Dla skrócenia notacji T_xM oznaczymy W_x

Mamy wprowadzić koneksję w wiązce $TM \longrightarrow M$, co oznacza, że musimy rozważyć TTM. TTM będzie oczywiście podzbiorem $TT\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Przyjrzyjmy się najpierw jak wygląda podwójna struktura $TT\mathbb{R}^3$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & TT\mathbb{R}^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T\mathbb{R}^3 & & T\mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & (x,v,w,u) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (x,v) & & (x,w) \end{tikzcd}$$

$$(x,v,w,u) + (x,v,\tilde{w},\tilde{u}) = (x,v,w+\tilde{w},u+\tilde{u}) \qquad (x,v,w,u) \boxplus (x,\tilde{v},w,\tilde{u}) = (x,v+\tilde{v},w,u+\tilde{u})$$

Jak znaleźć TTM? Można np rozważyć krzywą $t \longmapsto (x(t), v(t))$ w TM, tzn $F(x(t)) = 0$ i $\langle F'(x(t)), v(t) \rangle = 0$.

wtedy $w = \dot{x}(0)$ spełnia $\langle F'(x), w\rangle = 0$, czyli $w \in W_x$ i $u = \dot{v}(0)$ spełnia warunek

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle F'(x(t)), v(t)\rangle = 0 = F''(x(0))(\dot{x}(0), v(0)) + \langle F'(x(0)), \dot{v}(0)\rangle$$

$$F''(x)(w,v) + \langle F'(x), u\rangle = 0$$

u spełnia więc równanie afiniczne a nie liniowe. Nazwijmy $A_{x,v,w}$ podprzestrzeń afiniczną $\mathbb{R}^3$ definiowaną przez powyższe równanie:

$$A_{x,v,w} = \{u \in \mathbb{R}^3 : F''(x)(w,v) + \langle F'(x), u\rangle = 0\}$$

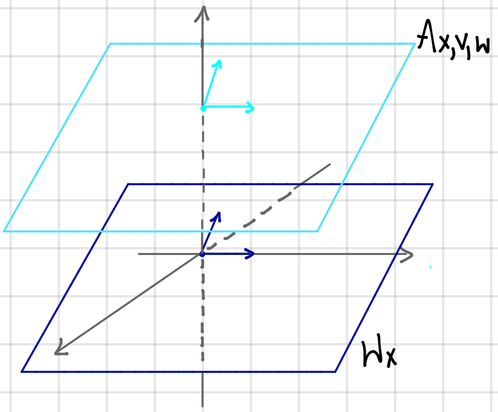
Ostatecznie $TTM \ni (x,v,w,u)$: $F(x)=0$ $\langle F'(x), v\rangle = 0$ $\langle F'(x), w\rangle = 0$ $F''(x)(w,v) + \langle F'(x), u\rangle = 0$

inaczej

$$x \in M, \quad v \in W_x, \; w \in W_x, \; u \in A_{x,v,w}$$

Zauważmy także że przy ustalonym x, v warunek na parę (w,u) jest liniowy, tzn $T_{(x,v)}TM$ jest podprzestrzenią wektorową w $T_{(x,v)}T\mathbb{R}^3$ oraz przy ustalonym (x,w) warunek na (v,u) także jest liniowy, zatem włókno drugiego rzutowania także jest podprzestrzenią wektorową.

Przestrzeń afiniczna $A_{x,v,w}$ jest modelowana na W_x, tzn jeśli $\delta u \in W_x$ i $u \in A_{x,v,w}$ to $u + \delta x \in A_{x,v,w}$. Wzajemne relacje W_x i A_{xvw} w $\mathbb{R}^3$ jest mniej więcej jak na rysunku:

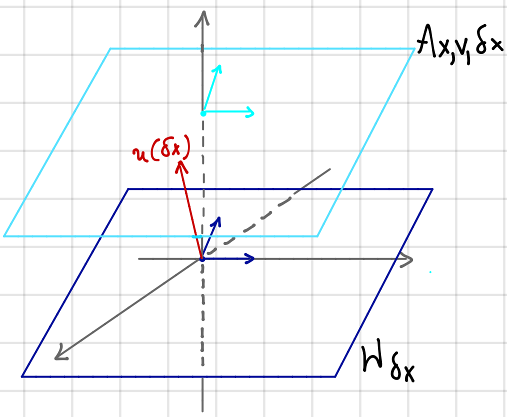


W_x i A_{xvw} są równoległymi płaszczyznami, W_x przechodzi przez 0 a A_{xvw} raczej nie. Gdy $v=0$ lub $w=0$ $A_{xvw} = W_x$

Przestrzeń wektorów pionowych $V_{(x,v)}TM$ jest postaci

$$(w,u): \; x \in M, \; v \in W_x \qquad w=0 \quad u \in A_{xv0} = W_x$$

czyli wektory pionowe są postaci $(0, \delta v)$ $\delta v \in W_x$.
Jak można dobrać dopełniającą przestrzeń horyzontalną.
Z całą pewnością na pierwszym miejscu musi stać dowolny wektor δx z W_x, żeby przestrzeń była dopełniająca. Na drugim miejscu USTALONY wektor z $A_{xv\delta x}$. Nie możemy wybrać 0, bo $(\delta x, 0)$ zazwyczaj nie należy do $V_{(x,v)}TM$. Jak zatem to zrobić? Skorzystać z iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$. Jeśli mamy już δx to mamy też ustaloną przestrzeń $A_{xv\delta x}$. element $u(\delta x)$ wybieramy jak na rysunku, tzn



$u(\delta x)$ jest jedynym wektorem prostopadłym do $W_{\delta x}$ i zawartym w $A_{x,v,\delta x}$

Mamy więc $T_{(x,v)}TM = V_{(x,v)}TM \oplus H_{(x,v)}$

$$V_{(x,v)}TM = \{(0, \delta v) : \delta v \in W_x\}$$

$$H_{(x,v)} = \{(\delta x, u(\delta x)) : \delta x \in W_x, \; u(\delta x) \in A_{x,v,\delta x} \text{ i } u(\delta x) \perp W_x\}$$

7

Weźmy teraz górną część hiperboloidy dwupowłokowej $x_3^2-x_1^2-x_2^2=1$, $x_3>0$. Wprowadziliśmy na niej współrzędne (a,b): $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=\sqrt{1+a^2+b^2}$. Przestrzeń W_x rozpięta jest przez ∂_a, ∂_b. Pamiętajmy że ∂_a i ∂_b z punktu widzenia zewnętrznej przestrzeni zależą od punktu. Na potrzeby tego rachunku oznaczmy $\partial_a=e_1(x)$ $\partial_b=e_2(x)$

$$e_1(x)=\begin{bmatrix}1\\0\\x_1/x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\a/\sqrt{1+a^2+b^2}\end{bmatrix}\qquad e_2(x)=\begin{bmatrix}0\\1\\x_2/x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\b/\sqrt{1+a^2+b^2}\end{bmatrix}$$

Krzywa w TM: $t\longmapsto\big(\underbrace{a+t\beta^1,\ b+t\beta^2}_{x(t)},\ (\alpha^1+t\gamma^1)e_1(x(t))+(\alpha^2+t\gamma^2)e_2(x(t))\big)$

Wektor styczny do tej krzywej we współrzędnych wewnętrznych opisany jest jako

$$\big(\underbrace{(a,b)}_{\substack{M\\x}},\underbrace{(\alpha^1,\alpha^2)}_{\substack{W_x\\v}},\underbrace{(\beta^1,\beta^2)}_{\substack{W_x\\w}},\underbrace{(\gamma^1,\gamma^2)}_{\substack{A_{x,v,w}\\u}}\big)\qquad (w,u)=\underbrace{(w,u(w))}_{\text{część pozioma}}+\underbrace{(0,u-u(w))}_{\text{część pionowa}}$$

Naszym zadaniem jest policzyć część pionową $(0,u-u(w))$ we współrzędnych wewnętrznych i.e. w bazie (e_1,e_2) i znaleźć w otrzymanym wyrażeniu ślady symboli Christoffela

Znajdźmy najpierw $u(w)$. Wiadomo, że $u(w)\perp e_i$ $i=1,2$ oraz $u(w)\in A_{x,v,w}$. Z prostopadłości do e_1 i e_2 wynika, że $u(w)$ jest proporcjonalny do wektora $\begin{bmatrix}-a\\-b\\\sqrt{1+a^2+b^2}\end{bmatrix}$ tzn $u(w)=\lambda\begin{bmatrix}-a\\-b\\\sqrt{1+a^2+b^2}\end{bmatrix}$

$$F'(x)=\begin{bmatrix}-2x_1 & -2x_2 & +2x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a & -2b & 2\sqrt{1+a^2+b^2}\end{bmatrix}\qquad F''(x)=\begin{bmatrix}-2&0&\\0&-2&\\&&2\end{bmatrix}$$

$$F''(x)(v,w)=\begin{bmatrix}\alpha^1 & \alpha^2 & \frac{\alpha^1a+\alpha^2b}{\sqrt{\ }}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&&\\&-2&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^1\\\beta^2\\\frac{\beta^1a+\beta^2b}{\sqrt{\ }}\end{bmatrix}=$$

$$-2\alpha^1\beta^1-2\alpha^2\beta^2+\frac{2}{1+a^2+b^2}(\alpha^1a+\alpha^2b)(\beta^1a+\beta^2b)=$$

$$=2\Big[-\alpha^1\beta^1-\alpha^2\beta^2+\frac{a^2\alpha^1\beta^1+b^2\alpha^2\beta^2+ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)}{1+a^2+b^2}\Big]=2\Big[-(1+b^2)\alpha^1\beta^1-(1+a^2)\alpha^2\beta^2+ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)\Big]/1+a^2+b^2$$

$$0=\frac{2}{1+a^2+b^2}\Big[-(1+b^2)\alpha^1\beta^1-(1+a^2)\alpha^2\beta^2+ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)\Big]+(2a^2+2b^2+2+2a^2+2b^2)\cdot\lambda$$

$$\lambda=\frac{1}{(1+a^2+b^2)(1+2a^2+2b^2)}\Big[(1+b^2)\alpha^1\beta^1+(1+a^2)\alpha^2\beta^2-ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)\Big]$$

$$u(w)=\frac{1}{(1+a^2+b^2)(1+2a^2+2b^2)}\Big[(1+b^2)\alpha^1\beta^1+(1+a^2)\alpha^2\beta^2-ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)\Big]\begin{bmatrix}-a\\-b\\\sqrt{1+a^2+b^2}\end{bmatrix}$$

Policzmy teraz u: $u=\gamma^1e_1+\gamma^2e_2+\alpha^1\dot e_1+\alpha^2\dot e_2$

$$\dot e_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\beta^1}{\sqrt{\ }}-\frac{a(a\beta^1+b\beta^2)}{\sqrt{\ }^3}\end{bmatrix}\qquad \dot e_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{\beta^2}{\sqrt{\ }}-\frac{b(a\beta^1+b\beta^2)}{\sqrt{\ }^3}\end{bmatrix}$$

$$u = \gamma^1 e_1 + \gamma^2 e_2 + \left((\alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2)/\sqrt{\quad} - \frac{a^2\alpha^1\beta^1 + b^2\alpha^2\beta^2 + ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)}{\sqrt{\quad}^{\,3}}\right)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \gamma^1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \frac{1}{\sqrt{\quad}^{\,3}}\left((1+b^2)\alpha^1\beta^1 + (1+a^2)\alpha^2\beta^2 - ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)\right)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$u - u(H) = \gamma^1 e_1 + \gamma^2 e_2 + \frac{1}{\sqrt{\quad}^{\,3}}\left((1+b^2)\alpha^1\beta^1 + (1+a^2)\alpha^2\beta^2 - ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)\right)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} +$$

$$- \frac{1}{(1+a^2+b^2)(1+2a^2+2b^2)}\left[(1+b^2)\alpha^1\beta^1 + (1+a^2)\alpha^2\beta^2 - ab(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)\right]\begin{bmatrix}-a\\-b\\\sqrt{1+a^2+b^2}\end{bmatrix}$$

pierwsza współrzędne

$$\gamma^1 - \frac{1}{(1+a^2+b^2)(1+2a^2+2b^2)}\Big[\overbrace{-a(1+b^2)}^{-\Gamma^1_{11}}\alpha^1\beta^1 \overbrace{- a(1+a^2)}^{-\Gamma^1_{22}}\alpha^2\beta^2 \overbrace{+ a^2b}^{-\Gamma^1_{12}}\,\alpha^1\beta^2 \overbrace{+ a^2b}^{-\Gamma^1_{21}}\,\alpha^2\beta^1\Big] =$$

$$\gamma^1 - \Gamma^1_{11}\alpha^1\beta^1 - \Gamma^1_{22}\alpha^2\beta^2 - \Gamma^1_{12}\alpha^1\beta^2 - \Gamma^1_{21}\alpha^2\beta^1 = \gamma^1 - \Gamma^1_{jk}\alpha^i\beta^k$$

druga współrzędne

$$\gamma^2 - \frac{1}{(1+a^2+b^2)(1+2a^2+2b^2)}\Big[\overbrace{-b(1+b^2)}^{-\Gamma^2_{11}}\alpha^1\beta^1 \overbrace{- b(1+a^2)}^{-\Gamma^2_{22}}\alpha^2\beta^2 + \overbrace{ab^2}^{-\Gamma^2_{12}\ -\Gamma^2_{21}}(\alpha^1\beta^2+\alpha^2\beta^1)\Big] = \gamma^2 - \Gamma^2_{11}\alpha^1\beta^1 - \Gamma^2_{22}\alpha^2\beta^2 - \Gamma^2_{12}\alpha^1\beta^2 - \Gamma^2_{21}\alpha^2\beta^1 =$$

$$= \gamma^2 - \Gamma^2_{jk}\alpha^i\beta^k$$

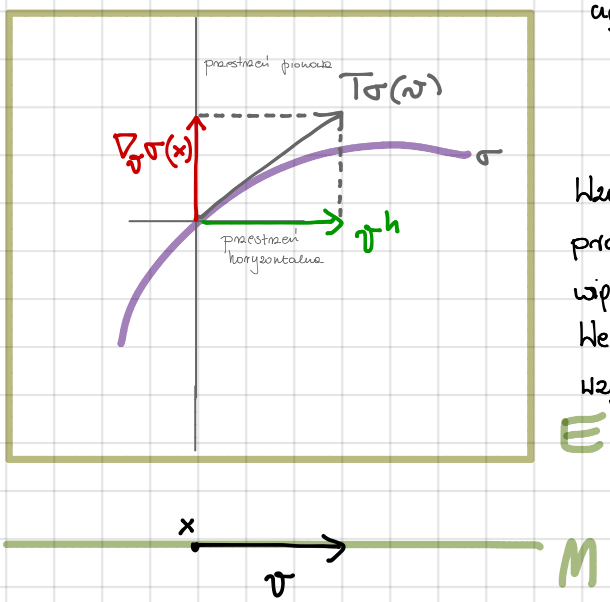
Trzecie współrzędne powinne być

$$\left(\gamma^1 - \Gamma^1_{ij}\alpha^i\beta^j\right)\frac{a}{\sqrt{\quad}} + \left(\gamma^2 - \Gamma^2_{ij}\alpha^i\beta^j\right)\frac{b}{\sqrt{\quad}}$$

Dość długi rachunek pokazuje, że istotnie tak jest

Okazuje się, że te same wzory na Symbole Christoffela które pojawiły się przy pochodnej kowariantnej na powierzchni zanurzonej są też związane z koneksją daną przez iloczyn skalarny w przestrzeni otaczającej

POCHODNA KOWARIANTNA W wiązce wektorowej z koneksją liniową zdefiniowana jest pochodna kowariantna cięć wiązki $E \longrightarrow M$.



Niech $\sigma: M \supset \mathcal{O} \longrightarrow E$ $x \in \mathcal{O}$ będzie lokalnym cięciem $E \longrightarrow M$ nad $\mathcal{O}$ otoczeniem x

$$(\nabla_v \sigma)(x) = pr_2 \Gamma(T\sigma(v))$$

Wzór wygląda być może na skomplikowany, ale ostatecznie procedura jest prosta: wektor $v \in T_xM$ podnosimy do wiązki E stycznie do cięcia σ otrzymując element $T_{\sigma(x)}E$. Wektor z $T_{\sigma(x)}E$ rozkładamy na część pionową i poziomą względem koneksji. Część pionową identyfikujemy z elementem włókna E_x

Zapiszmy pochodną kowariantną we współrzędnych: Użyjemy (x^i, y^a) w E. Cięcie $\sigma: M \to E$ wyraża się funkcjami σ^a: $(x^i) \xrightarrow{\sigma} (x^i, \sigma^a(x))$. Weźmy także $v \in TM$ $v = \dot{x}^j(v)\frac{\partial}{\partial x^i}$
Wektor $T\sigma(x)$ styczny do E w punkcie $\sigma(x)$ ma postać

$$\dot{x}^i(v)\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial \sigma^a}{\partial x^i}\dot{x}^i(v)\frac{\partial}{\partial y^a}$$ Bierzemy część pionową:

$$\left[\frac{\partial \sigma^a}{\partial x^i}\dot{x}^i(v) + \Gamma^a_{ib}\,\dot{x}^i(v)\sigma^a(x)\right]\frac{\partial}{\partial y^a}$$

utożsamienie $V_{\sigma(x)}E$ z E_x oznacza, że $\frac{\partial}{\partial y^a}$ przechodzi na y^a

$$\nabla_v \sigma = \left(\frac{\partial \sigma^a}{\partial x^i}(x)\,\dot{x}^i(v) + \Gamma^a_{ib}(x)\,\dot{x}^i(v)\,\sigma^a(x)\right)e_a$$

STWIERDZENIE: WŁASNOŚCI POCHODNEJ KOWARIANTNEJ
(1) $\nabla_{\lambda v + \beta w}\sigma = \lambda\nabla_v\sigma + \beta\nabla_w\sigma$
(2) $\nabla_v(\sigma+\omega) = \nabla_v\sigma + \nabla_v\omega$, $\quad \nabla_v(f\sigma) = f\nabla_v\sigma + (vf)\sigma$

DOWÓD: (1) jest oczywiste: odwzorowanie $v \mapsto \nabla_v\sigma$ jest złożeniem odwzorowań liniowych, jest więc liniowe

(2) Zauważmy przede wszystkim, że $T(\sigma+\omega)(v) = T\sigma(v) \boxplus T\omega(v)$. Wynika to wprost z definicji „drugiego" dodawania w TE i definicji odwzorowania stycznego: jeśli $\gamma: \mathbb{R} \to M$ jest krzywą taką, że $\gamma(0) = v$ to $T\sigma(v)$ jest styczny do $\sigma\circ\gamma$, $T\omega(v)$ styczny do $\omega\circ\gamma$. Obie te krzywe rzutują się na γ - można je więc dodać. Z definicji wektor styczny do $\sigma\circ\gamma + \omega\circ\gamma$ to $T\sigma(v) \boxplus T\omega(v)$. Z drugiej strony $\sigma\circ\gamma + \omega\circ\gamma = (\sigma+\omega)\circ\gamma$, czyli krzywa reprezentująca $T(\sigma+\omega)(v)$. Koneksja Γ jest liniowa ze względu na obie struktury, więc

$$\Gamma(T\sigma(v) \boxplus T\omega(v)) = (\sigma(x)+\omega(x), \nabla_v\sigma + \nabla_v\omega, v) \Rightarrow \nabla_v(\sigma+\omega) = \nabla_v\sigma + \nabla_v\omega.$$

Weźmy teraz $f \in C^\infty(M)$ i cięcie σ. Do policzenia $\nabla_v(f\sigma)$ potrzebujemy $T(f\sigma)(v)$. Niech γ reprezentuje v jak poprzednio. Szukamy wektora stycznego do $f(\gamma(t))\sigma(\gamma(t))$. Można to zrobić na dwa sposoby - łatwiejszy we współrzędnych i trudniejszy używając obiektów geometrycznych. Na współrzędnych liczymy tak:

$v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ $\quad \gamma^i(t) = x^i + tv^i$ $\quad \sigma: M \to E$ $\quad \sigma(x) = (x^i, \sigma^a(x))$

$(f\sigma)(x) = (x^i, f(x)\sigma^a(x))$ $\quad (f\sigma)\circ\gamma(x) = (x^i + tv^i, f(x^i+tv^i)\sigma^a(x^i+tv^i))$

$$T(f\sigma)(v) = \left(x^i, f(x)\sigma^a(x), v^i, f(x)\frac{\partial\sigma^a}{\partial x^i}v^i + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}v^i\right)\sigma^a(x)\right)$$

$$pr_2(\Gamma(Tf\sigma(v))) = \left(x^i, f(x)\frac{\partial\sigma^a}{\partial v^i}v^i + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}v^i\right)\sigma^a(x) + \Gamma^a_{kb}v^k f(x)\sigma^b(x)\right) = f(x)\underbrace{\left[\frac{\partial\sigma^a}{\partial x^i}v^i + \Gamma^a_{kb}v^k\sigma^b(x)\right]e_a}_{\nabla_v\sigma} + (vf)\sigma^a(x)$$

$$\nabla_v(f\sigma) = f\nabla_v\sigma + (vf)\sigma$$

Rachunek ogólny odpuszczamy. Często używa się oznaczenia $\nabla_v f$ na (vf) jeśli piszemy „w kontekście" pochodnej kowariantnej. Wtedy wzór przyjmuje postać $\nabla_v(f\sigma) = f\nabla_v\sigma + (\nabla_v f)\sigma$, czyli wygląda jak reguła Leibniza. ∎

Definicja pochodnej kowariantnej na cięciach E wraz z regułą Leibniza pozwala rozszerzyć pochodną kowariantną na cięcia dowolnej wiązki tensorowej związanej z E. W szczególności cięcia E^*.

Postulujemy zatem: $\nabla_v\langle\alpha, \sigma\rangle = \langle\nabla_v\alpha, \sigma\rangle + \langle\alpha, \nabla_v\sigma\rangle$ dla dowolnych $v \in TM$, α - cięcie $E^* \to M$ i σ - cięcie $E \to M$

Rachunkiem na współrzędnych sprawdźmy, że powyższy warunek jednoznacznie definiuje $\nabla_v \alpha$. Niech $\sigma = \sigma^a e_a$ $\alpha = \alpha_b \varepsilon^b$ $v = v^i \partial_i$

10

$$v^i \partial_i (\sigma^a \alpha_a) = (\nabla_v \alpha)_b \sigma^b + \alpha_c (\nabla_v \sigma)^c$$

$$\alpha_c(\nabla_v\sigma)^c \to \underline{v^i \alpha_c (\partial_i \sigma^c)} + \Gamma^c_{id} v^i \sigma^d$$

$$v^i \partial_i (\sigma^a \alpha_a) = \underline{v^i (\partial_i \sigma^a) \alpha_a} + v^i \sigma^a (\partial_i \alpha_a)$$

$$v^i \sigma^a (\partial_i \alpha_a) = (\nabla_v \alpha)_b \sigma^b + \Gamma^c_{id} v^i \sigma^d$$

Równość ma być prawdziwa dla dowolnego σ, więc

$$\boxed{(\nabla_v \alpha)_b = v^i (\partial_i \alpha_b) - \Gamma^c_{ib} v^i \alpha_c}$$

Dalej możemy podobnie postąpić z np. formą dwuliniową g na wiązce E. Jest to odwzorowanie $E \times_M E \to \mathbb{R}$ dwuliniowe, a więc cięcie $E^* \otimes_M E^* \to M$ (g)

Pochodną kowariantną g (tzn $\nabla_v g$) znajdziemy z warunku:

$\forall v \in TM$, σ, ω - cięcia $E \to M$ zachodzi

$$\nabla_v (g(\sigma, \omega)) = (\nabla_v g)(\sigma, \omega) + g(\nabla_v \sigma, \omega) + g(\sigma, \nabla_v \omega)$$

Przyjmując, że we współrzędnych $g = g_{ab}(x)\, \varepsilon^a \otimes \varepsilon^b$ (tzn $g(\sigma,\omega) = g_{ab}(x) \sigma^a(x) \omega^b(x)$) łatwo wyprowadzić wzór na $(\nabla_v g)_{ab}$ - ćwiczenie

UWAGA: Pokazaliśmy że koneksja (i.e. dystrybucja horyzontalna albo odwzorowanie Γ ...) pozwala zdefiniować pochodną kowariantną na cięciach wiązki E. Ogólniej, na cięciach dowolnej tensorowej wiązki związanej z E. Okazuje się że jest też odwrotnie, tzn mając odwzorowanie $\nabla : TM \times Sec(\rho) \longrightarrow Sec(\rho)$ spełniające warunki:

cięcia $E \to M$

$$\nabla_{\alpha v + \beta w} \sigma = \alpha \nabla_v \sigma + \beta \nabla_w \sigma$$

$$\nabla_v f\sigma = f \nabla_v \sigma + (vf)\sigma$$

$$\nabla_v (\sigma + \omega) = \nabla_v \sigma + \nabla_v \omega$$

Możemy znaleźć koneksję od której ta pochodna się wzięła. Zadanie do samodzielnego rozwiązania: Udowodnić, że każda pochodna kowariantna jest związana z pewną koneksją (w kontekście liniowym tzn. na wiązce wektorowej)