GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II

WYKŁAD 6

- krzywizna koneksji
- koneksje w wiązce stycznej
- transport równoległy

GEOMETRIA II WYKŁAD 6 17 V

Koneksję bardziej po polsku nazywa się powiązanie. Zastanówmy się więc najpierw co i z czym powiązanie wiąże. Niech więc $E \xrightarrow{\varrho} M$ będzie wiązką wektorową wyposażoną w koneksję liniową. Niech także $\gamma: I \to M$ będzie ustaloną krzywą gładką w rozmaitości M. Przyjmijmy że $[t_0, t_1] \subset I$. Koneksja pozwala podnosić horyzontalnie wektory z TM do TE. Dla ustalonego $t \in I$ podnosimy $\dot\gamma(t)$ do każdego punktu we włóknie $\varrho^{-1}(\gamma(t))$. Tak samo robimy dla wszystkich t. W efekcie uzyskujemy pole wektorowe na podrozmaitości $\varrho^{-1}(\gamma(I))$. Zapiszmy to pole we współrzędnych. Użyjemy współrzędnych (x^i, y^a). Krzywa γ dana jest układem funkcji

$\gamma(t) = (\gamma^i(t))$, zatem $\dot\gamma(t) = \left(\frac{d}{dt}\gamma^i(t)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$. Podniesienie horyzontalne $\dot\gamma(t)$ do punktu $(\gamma^i(t), y^a)$ jest wektorem

$$(\dot\gamma(t))^h = \left(\frac{d}{dt}\gamma^i(t)\right)\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^b_{ja}(\gamma(t))\left(\frac{d}{dt}\gamma^j(t)\right)y^a =$$
$$= \dot\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^b_{ja}\dot\gamma^j y^a$$

Uzyskane w ten sposób „pole wektorowe" potraktować można jako równanie różniczkowe na krzywe w E. Ponieważ to pole dane jest jedynie na $\varrho^{-1}(\gamma(I))$ i jest do tej podrozmaitości styczne to rozwiązanie będą krzywymi w tej podrozmaitości. Ponadto każde rozwiązanie będzie krzywą rzutującą się na γ. Równanie we współrzędnych ma postać

$$\dot y^a = -\Gamma^a_{jb}(\gamma(t))\,\dot\gamma^j(t)\,y^b$$

Z punktu widzenia teorii równań różniczkowych jest to układ równań liniowy na funkcje (y^a) ze współczynnikami zależnymi od czasu. Macierz układu

$$[A(t)]^a{}_b = -\Gamma^a_{jb}(\gamma(t))\,\dot\gamma^j(t) \quad \text{zależy od krzywej } \gamma.$$

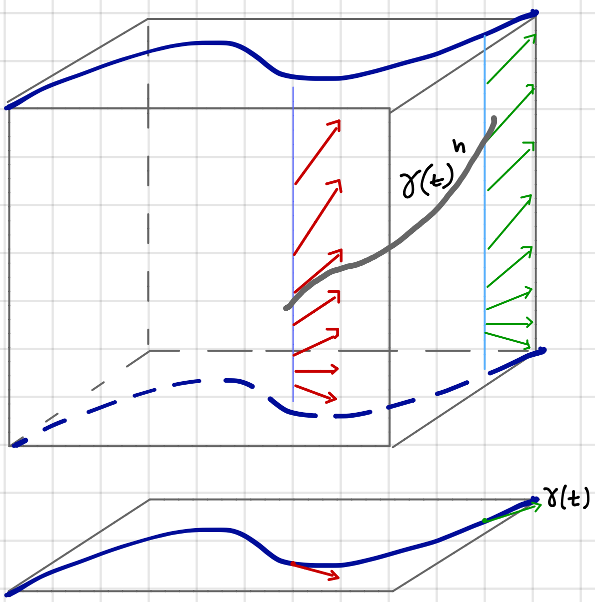
W przypadku ogólnym nie umiemy oczywiście podać rozwiązań, jednak z faktu, że układ jest liniowy możemy wiele się dowiedzieć. W szczególności wiadomo że rozwiązanie jest postaci

$$y^a(t) = \underbrace{R(t,t_0)^a{}_b}_{\text{macierz rezolwenty}}\, y^b(t_0) \quad \leftarrow \text{warunek początkowy}$$

Zatem każdemu punktowi e we włóknie $\varrho^{-1}(\gamma(t_0))$ odpowiada jedna krzywa, którą nazwiemy podniesieniem horyzontalnym γ do punktu e. Zależność między warunkami początkowymi a wartością rozwiązania w $t=t_1$ jest liniowa ($R(t_1,t_0)$) i odwracalna ($(R(t_1,t_0))^{-1} = R(t_0,t_1)$)

$$E_{\gamma(t_0)} \longrightarrow E_{\gamma(t_1)} \qquad (\gamma^i(t_0), y^a) \longmapsto (\gamma^i(t_1), R(t_1,t_0)^a{}_b\, y^b)$$

jest izomorfizmem włókien $E_{\gamma(t_0)}$ i $E_{\gamma(t_1)}$. Zwróćmy uwagę że izomorfizm ten zależy od bazowej krzywej γ łączącej punkty $\gamma(t_0)$ i $\gamma(t_1)$. Wprowadzenie koneksji liniowej w wiązce $E \to M$ nie powoduje więc, że wiązka robi się trywialna. Izomorfizm między włóknami nie jest uniwersalny – zależy od drogi jaką pokonujemy na bazie. Naturalne wydaje się więc pytanie: Czy jeśli krzywa na bazie jest zamknięta to jej horyzontalne podniesienie też jest krzywą zamkniętą?



Załóżmy przez chwilę, że dystrybucja horyzontalna jest zupełnie całkowalna. Dystrybucji tej odpowiada wtedy foliacja rozmaitości E powierzchniami całkowymi dystrybucji H wymiaru $m = \dim M$. Foliacja ta jest transwersalna do włókien, tzn każdy liść foliacji przecina każde włókno dokładnie raz. Podniesienie horyzontalne należy do liścia wyznaczonego przez punkt początkowy. Krzywe zamknięte podnoszą się do krzywych zamkniętych a cała wiązka $E \to M$ jest trywializowalna. Dowolne włókno można wybrać jako włókno typowe i strywializować wiązkę $E \to M \times E_q$

Twierdzenie Frobeniusa dostarcza kryterium całkowalności: Jeśli horyzontalne pola wektorowe są zamknięte ze względu na nawias Liego to dystrybucja horyzontalna jest całkowalna. Koneksję z całkowalną dystrybucją horyzontalną nazywamy koneksją płaską. Jak mierzyć niepłaskość koneksji – można na przykład tak:

Niech X i Y będą dowolnymi polami wektorowymi na M. Symbolem X^h oznaczymy horyzontalne pole na E rzutujące się na X. Jeśli $X = x^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ to

$$X^h = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^a_{jb}X^j\frac{\partial}{\partial y^a}$$

Sprawdźmy jak wygląda $[X^h, Y^h]$

Liczymy więc

$$[X^h, Y^h] = [X^i(x)\partial_i - \Gamma^a_{jb}(x)X^jy^b\partial_a, Y^i(x)\partial_i - \Gamma^a_{jb}(x)Y^jy^b\partial_a] =$$
$$X^i(\partial_iY^j)\partial_j - X^i(\partial_i\Gamma^a_{jb}y^bY^j\partial_a - X^i\Gamma^a_{jb}(\partial_iY^j)y^b\partial_a + \Gamma^a_{jb}(x)X^jy^b\Gamma^c_{ia}Y^i\partial_c -$$
$$\left\{Y^i(\partial_iX^j)\partial_j - Y^i(\partial_i\Gamma^a_{jb}y^bX^j\partial_a - Y^i\Gamma^a_{jb}(\partial_iX^j)y^b\partial_a + \Gamma^a_{jb}(x)Y^jy^b\Gamma^c_{ia}X^i\partial_c\right\} =$$

Porządkujemy wynik: $= (X^i\partial_iY^j - Y^i\partial_iX^j)\partial_j - \Gamma^a_{jb}(X^i\partial_iY^j - Y^i\partial_iX^j)y^b\partial_a$

$$+ \left[\partial_j\Gamma^c_{ib} - \partial_i\Gamma^c_{jb} + \Gamma^a_{ib}\Gamma^c_{ja} - \Gamma^a_{jb}\Gamma^c_{ia}\right]X^iY^jy^b\partial_c$$

$$[X^h, Y^h] = (x^i\partial_i y^j - y^i\partial_i x^j)\partial_j - \Gamma^a_{jb}(x^i\partial_i y^j - y^i \partial_i x^j) y^b \partial_a$$
$$+ \left[\partial_j \Gamma^c_{ib} - \partial_i \Gamma^c_{jb} + \Gamma^a_{ib}\Gamma^c_{ja} - \Gamma^a_{jb}\Gamma^c_{ia}\right] x^i y^j y^b \partial_c$$

Wyrazenie kolorowe składają się do $[X,Y]^h$, zatem $[X^h, Y^h]$ rzutuje się na $[X,Y]$. Odstępstwo od inwolutywności dystrybucji jest więc mierzone wyrazeniem

$$\left[\partial_j \Gamma^c_{ib} - \partial_i \Gamma^c_{jb} + \Gamma^a_{ib}\Gamma^c_{ja} - \Gamma^a_{jb}\Gamma^c_{ia}\right] X^i Y^j y^b \partial_c$$

Jest to, jak widać pionowe pole wektorowe (tzn $[X^h, Y^h] - [X,Y]^h$ jest pionowe) zależy no liniowo od X, Y i punktu (y^b) we włóknie. Pionowe pole wektorowe utożsamić można z cięciem samej wiązki otrzymując odwzorowanie

$$R: E \times_M TM \times_M TM \longrightarrow E \quad \text{trzyliniowe, nad } M \longrightarrow \text{tensor}$$

R można uważać za cięcie wiązki tensorowej $E^* \otimes_M T^*M \otimes_M T^*M \otimes_M E$, tzn współczynniki w bazie mają postać

$$R^c_{bij} \qquad R(\sigma, X, Y) = R^c_{bij}\sigma^b X^i Y^j e_c$$

Z samej definicji wynika, że R jest antysymetryczny ze względu na zamianę X i Y, tzn R^a_{bij} jest antysymetryczny w indeksach i,j

$$R^a_{bij} = -R^a_{bji}$$

Tensor R nazywa się tensorem krzywizny koneksji liniowej Γ. Ogólnie rzecz biorąc krzywizna koneksji to zawsze wyrażenie $[X^h, Y^h] - [X,Y]^h$ niezależnie od tego w jakim kontekście koneksję rozważamy. Zależny od kontekstu jest obiekt geometryczny reprezentujący koneksję. Na wiązce głównej np. to samo wyrażenie daje pewną dwuformę o wartościach w algebrze Liego...

Co to znaczy, że różnica koneksji jest tensorem? Zauważyliśmy już że tę samą geometryczną ideę możemy na różne sposoby reprezentować przy pomocy obiektów geometrycznych (dystrybucja, odwzorowanie Γ, pochodna kowariantna, podniesienie horyzontalne...) Co to więc znaczy, że koneksja nie jest tensorem ale różnica dwóch koneksji jest? Stwierdzenie „koneksja nie jest tensorem" zazwyczaj odnosi się do faktu, że współczynniki Christoffela nie transformują się z układu współrzędnych do układu współrzędnych jak współczynniki tensora. Koneksji nie możemy więc „zakodować" w polu tensorowym.

Rozważmy jednak dwie różne koneksje Γ i $\tilde{\Gamma}$ i przyjrzyjmy się horyzontalnym podniesieniom względem obu koneksji. Niech X będzie polem na M, $X = x^i \partial_i$. Wtedy

$$X^h = x^i \partial_i - \Gamma^a_{jb} y^b x^j \partial_a \qquad X^{\tilde{h}} = x^i \partial_i - \tilde{\Gamma}^a_{jb} y^b x^j \partial_a$$

$$X^h - X^{\tilde{h}} = (-\Gamma^a_{jb} y^b x^j + \tilde{\Gamma}^a_{jb} y^b x^j)\partial_a$$

Różnica podniesień jest pionowym polem (można utożsamić z cięciem $E \to M$) oraz liniowo zależy od (y^b) i (x^j). Daje więc liniowe odwzorowanie

$$E \times_M TM \longrightarrow E \quad \text{a więc cięcie} \quad E^* \otimes_M T^*M \otimes_M E \longrightarrow M$$

Koneksja w wiązce stycznej: Wszystko co do tej pory mówiliśmy odnosi się także do wiązki stycznej, tzn można wziąć $E = TM$. Wszystkie indeksy są wtedy tego samego gatunku, tzn symbole Christoffela Γ^i_{jk} i tensor krzywizny R^i_{jkl}

Spójrzmy w szczególności na pojęcie horyzontalnego podniesienia krzywej. Załóżmy, że w wiązce stycznej TM mamy koneksję liniową. Podniesienie horyzontalne krzywej γ jest więc krzywą w TM. Podniesienie styczne krzywej γ $(t \mapsto \dot{\gamma}(t) \in TM)$ też jest krzywą w TM. Można więc poszukać takich krzywych, których oba podniesienia są równe.

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma^h(t)$$

Jeśli γ opisana jest funkcjami $t \mapsto \gamma^i(t)$ to podniesienie styczne jest postaci $t \mapsto (\gamma^i(t), \dot{\gamma}^i(t)) \in TM$. Podniesienie horyzontalne $t \mapsto (\gamma^i(t), \delta\gamma^i(t))$ spełniać musi równanie

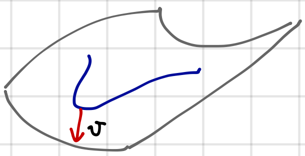
$$\delta\dot{\gamma}^i = -\Gamma^i_{jk} \dot{\gamma}^j \delta\gamma^k$$

warunek styczne = horyzontalne oznacza $\delta\gamma^i = \dot{\gamma}^i$, tzn

$$\ddot{\gamma}^i = -\Gamma^i_{jk} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k$$

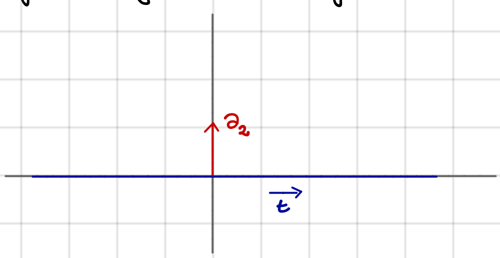
Krzywą spełniającą powyższe równanie nazywa się **krzywą autorównoległą** lub **geodezyjną**. Skąd przymiotnik „autorównoległy"? Na problem horyzontalnego podniesienia krzywej do wiązki stycznej można patrzeć następująco:

Mamy krzywą γ w rozmaitości w wiązce stycznej takiej że $\delta\gamma(t_0) = v$. Szukamy zatem



podnosimy γ do krzywej $\delta\gamma$. $\delta\gamma$ jest horyzontalna i dla $t = t_0$ przesunięcia wektora v wzdłuż γ. to przesunięcie nazywa się przesunięciem równoległym. Jeśli wektory styczne do krzywej i przesunięcie równoległe wektora stycznego to jest to samo, mówimy o autorównoległości.

PRZYKŁAD: Niech $M = \mathbb{R}^2$. Rozważamy koneksję, która ma trzy niezerowe współczynniki $\Gamma^1_{11} = x^1$, $\Gamma^2_{22} = 2x^2$, $\Gamma^1_{12} = 1$. Znaleźć przesunięcie równoległe wektora ∂_2 zaczepionego w $(0,0)$ wzdłuż krzywej $t \mapsto (t, 0)$



Krzywe $t \mapsto (t,0)$ podniesiona horyzontalnie spełnia równanie:

$$t \longmapsto (t, 0, \delta x^1(t), \delta x^2(t))$$

$x^1(t) = t$

$x^2(t) = 0$

$\dot{x}^1(t) = 1$

$\dot{x}^2(t) = 0$

$$\frac{d}{dt}(\delta x^1) = -\overset{t}{\Gamma^1_{11}} \cdot \overset{1}{\dot{x}^1} \cdot \delta x^1 - \overset{1}{\Gamma^1_{12}} \cdot \overset{1}{\dot{x}^1} \cdot \delta x^2 - \overset{0}{\Gamma^1_{21}} \cdot \overset{0}{\dot{x}^2} \delta x^1 - \overset{0}{\Gamma^1_{22}} \overset{0}{\dot{x}^2} \delta x^2$$

$$\frac{d}{dt}(\delta x^2) = -\overset{0}{\Gamma^2_{11}} \cdot \overset{1}{\dot{x}^1} \delta x^1 - \overset{0}{\Gamma^2_{12}} \overset{1}{\dot{x}^1} \delta x^2 - \overset{0}{\Gamma^2_{21}} \overset{0}{\dot{x}^2} \delta x^1 - \overset{0}{\Gamma^2_{22}} \overset{0}{\dot{x}^2} \delta x^2$$

$$\frac{d}{dt}(\delta x^1) = -t\,\delta x^1 - \delta x^2$$

$$\frac{d}{dt}(\delta x^2) = 0 \implies \delta x^2 = C \qquad C = 1$$ z warunku początkowego $\delta x^2(0) = 1$

$\frac{d}{dt}\delta x^1 = -t\,\delta x^1 - 1$ równanie liniowe niejednorodne

R.J.: $\frac{d}{dt}(\delta x^1) = -t\,\delta x^1 \qquad \frac{d(\delta x^1)}{\delta x^1} = -t\,dt \qquad \log|\delta x^1| = -\frac{1}{2}t^2 + D$

$$|\delta x^1| = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\underbrace{\exp(D)}_{\text{stałe} > 0}$$

, opuszczamy $|\cdot|$ i zamieniamy stałą na dowolną

$$\delta x^1 = A\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

Szukamy RSRN uzmiennianie stałych: $\delta x^1 = A(t)\exp\left(-t^2/2\right)$

$$\dot{A}\exp(-t^2/2) + \cancel{A\cdot(-t)\exp(-t^2/2)} = \cancel{-t A \cdot \exp(-t^2/2)} - 1 \qquad \dot{A} = -\exp(t^2/2)$$

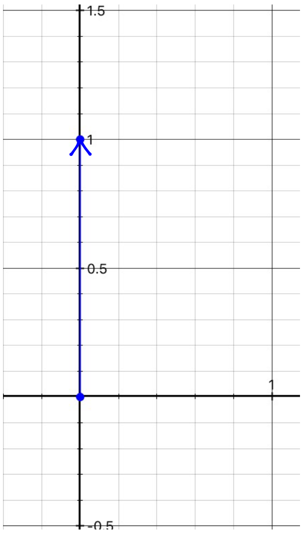
oznaczmy $F(t) = \int_0^t \exp(s^2/2)\,ds \qquad A(t) = -F(t) + A_0 \qquad$ RSRN : $t \mapsto -F(t)\exp(-t^2/2)$

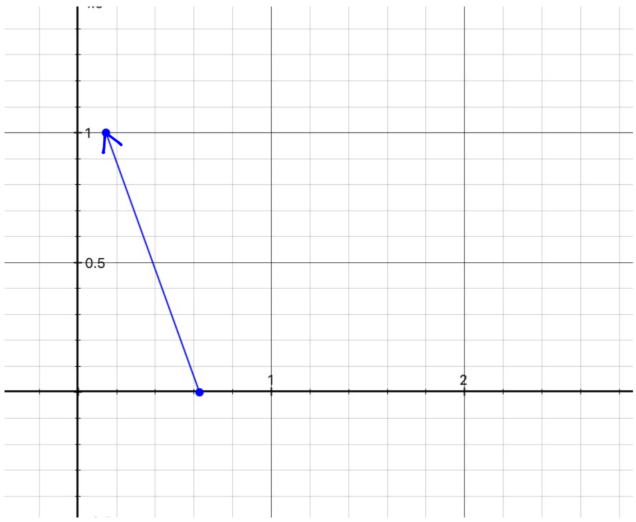
RORN : $\delta x^1(t) = A\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) - F(t)\exp(-t^2/2)$

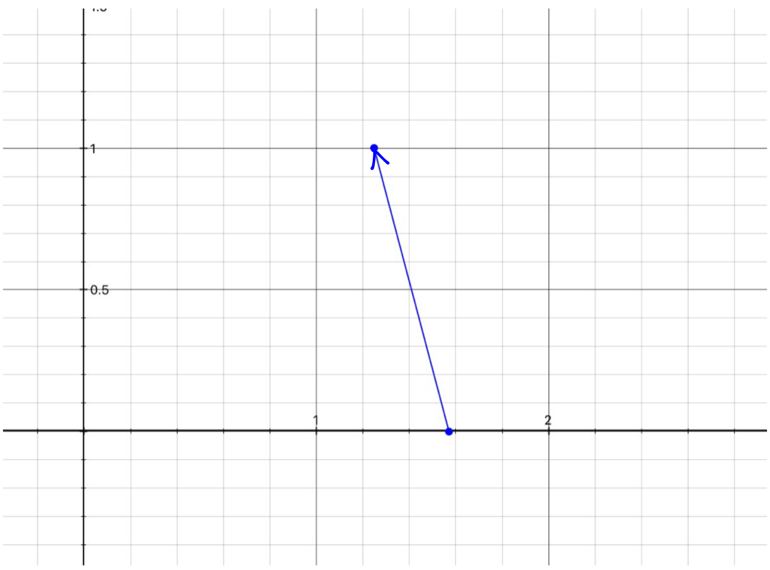
w. pocz. $\delta x^1(0) = 0 \quad \to \quad 0 = A - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F(0)}} \cdot 1 \quad \implies A = 0$

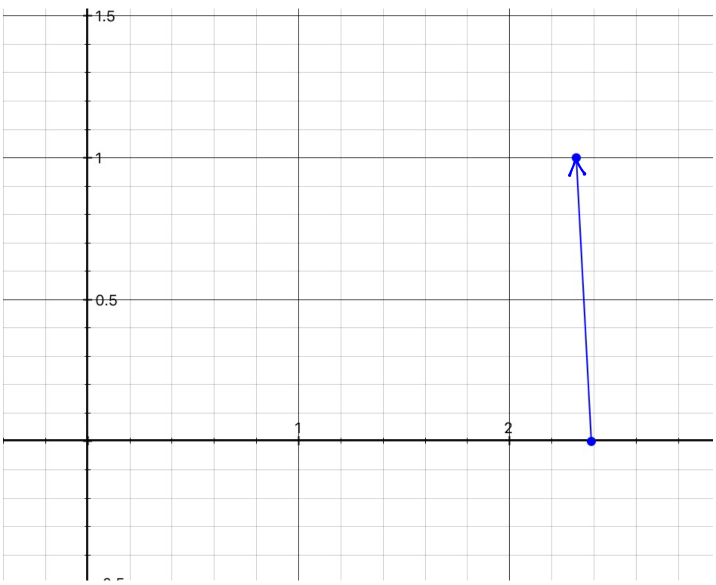
$\left.\begin{array}{l}\text{Podniesienie horyzontalne}\\ \text{Transport równoległy}\end{array}\right\}$: $\quad -F(t)\exp(-t^2/2)\,\partial_1 + \partial_2 \quad$ wzdłuż $(t,0)$

Transport równoległy wektora ∂_2 wzdłuż $t \longmapsto (t,0)$









A jak w tym przykładzie będzie wyglądało równanie geodezyjnej?

$$\ddot{x}^1 = -\overset{x^1}{\Gamma^1_{11}}\dot{x}^1\dot{x}^1 - \overset{1}{\Gamma^1_{12}}\dot{x}^1\dot{x}^2 - \overset{0}{\Gamma^1_{21}}\dot{x}^2\dot{x}^1 - \overset{0}{\Gamma^1_{22}}\dot{x}^2\dot{x}^2$$

$$\ddot{x}^2 = -\overset{0}{\Gamma^2_{11}}\dot{x}^1\dot{x}^1 - \overset{0}{\Gamma^2_{12}}\dot{x}^1\dot{x}^2 - \overset{0}{\Gamma^2_{21}}\dot{x}^2\dot{x}^1 - \overset{2x^2}{\Gamma^2_{22}}\dot{x}^2\dot{x}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}^1 &= -x^1(\dot{x}^1)^2 - \dot{x}^1\dot{x}^2 \\ \ddot{x}^2 &= -2x^2(\dot{x}^2)^2 \end{aligned}}$$

Rozwiązywalne, ale zawierają funkcje, które nie wyrażają się przez f. elementarne