GEOMETRIA II

WYKŁAD 7

O KONEKSJI W/G prof. J. Kijowskiego

TORSJA

KONEKSJA METRYCZNA

WŁASNOŚCI R

GEOMETRIA II WYKŁAD 7 (koneksje na sposób prof J. Kijowskiego)

W tym wykładzie pojawi się jeszcze jeden sposób rozumienia koneksji liniowej, początkowo w wiązce stycznej a potem bardziej ogólnie. Zacznijmy od wprowadzenia „filozoficznego". Od początku semestru nasz wykład toczy się wokół różnych sposobów różniczkowania pól tensorowych na rozmaitości co wiąże się z problemem porównywania wartości tych pól w różnych punktach rozmaitości. Jak na razie wymyśliliśmy dwa sposoby różniczkowania – pochodna Liego wzdłuż pola wektorowego i pochodna kowariantna związana z koneksją. Poraz kolejny, w inny sposób, zajmiemy się koneksją. Tym razem pracować będziemy w układach współrzędnych. Zacznijmy od szczególnej rozmaitości jaką jest przestrzeń afiniczna. Bierzemy więc $M=A$, oznaczmy przez V przestrzeń modelową. Wiadomo, że $TA = A\times V$, $T^*A = A\times V^*$, wektory styczne w różnych punktach należą do tej samej przestrzeni wektorowej V, wobec tego pola wektorowe możemy różniczkować, wektory przesuwać od punktu do punktu. Praktycznie różniczkowanie odbywa się „po współrzędnych" ale, uwaga! tylko jeśli pracujemy w szczególnym układzie współrzędnych! to znaczy w układzie afinicznym, „prostoliniowym" pochodzącym od bazy w V. Bierzemy $e=(e_1,\ldots,e_n)$ bazę w V, $\varepsilon=(\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^n)$ bazę w V^* dualną do V wybieramy a_0 - punkt w A i wprowadzamy współrzędne (x^i)

$$x^i(a) = \langle \varepsilon^i, a-a_0\rangle \quad \text{Wtedy} \quad a = a_0 + \sum_i x^i(a) e_i \quad \text{oraz w}$$

każdym punkcie $T_aA = V$ $\quad \frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$, $\quad dx^i = \varepsilon^i$ $\quad T_a^*A = V^*$

Różniczkowanie pól wyrażonych w innym niż afiniczny układzie współrzędnych nie odbywa się już po współrzędnych. Weźmy typowy przykład na $\mathbb{R}^2$ we współrzędnych biegunowych

$$X = X^r\frac{\partial}{\partial r} + X^\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

Różniczkowanie X w kierunku $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ wymaga różniczkowania X^r i X^φ ale także $\frac{\partial}{\partial r}$ i $\frac{\partial}{\partial \varphi}$

$$D_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$D_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = -r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} = -r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$D_\varphi(X) = X^r_\varphi\frac{\partial}{\partial r} + X^r\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + X^\varphi_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} - X^\varphi r\frac{\partial}{\partial r} =$$
$$= \left(X^r_\varphi - rX^\varphi\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(X^\varphi_\varphi + \frac{1}{r}X^r\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

odstępstwa od różniczkowania „po współrzędnych"

Różniczkowanie po współrzędnych odbywa się zatem jedynie w wyróżnionym układzie współrzędnych. Podobnie przesunięcie równoległe. Jeśli baza zmienia się od punktu do punktu przesunięcie równoległe nie polega na zapisaniu tych samych współrzędnych w innym punkcie.

Możliwość różniczkowania i możliwość przesuwania opiera się na istnieniu wyróżnionych układów współrzędnych. Na przestrzeni afinicznej każdy afiniczny układ współrzędnych będzie dobry. Zmiana jednego afinicznego na inny afiniczny jest przekształceniem afinicznym, tzn ma postać

$$y^i = v^i + \Lambda^i{}_j x^j$$ gdzie v^i są stałe a $\Lambda^i{}_j$ jest stałą macierzą.

Oznacza to w szczególności, że $\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^i \partial x^j} = 0$. Tak nie jest w ogólności dla krzywoliniowych układów.

Np: $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$ $\frac{\partial^2 x}{\partial r \partial \varphi} = -\sin\varphi$ $\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} = -r\cos\varphi$ $\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial r \partial \varphi} = \cos\varphi$ $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = -r\sin\varphi$

Wprowadzenie w wiązce stycznej koneksji polega na upodobnieniu naszej rozmaitości do przestrzeni afinicznej poprzez wprowadzenie wyróżnionych układów współrzędnych. To się jednak nie da naiwnie zrobić globalnie (bo wtedy zwyczajnie strywializowalibyśmy wiązkę a to nie zawsze da się zrobić, patrz TS^2) ani nawet nie da się zrobić zazwyczaj na całym otoczeniu punktu (to ma związek z krzywizną). Można natomiast postąpić w następujący sposób:

W zbiorze par $q \in M$, (φ^i) - układ współrzędnych w otoczeniu q wprowadzamy relację równoważności:

$$(q,(\varphi^i)) \sim (p,(\psi^j)) \iff q = p \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \psi^j \partial \psi^k}(q) = 0$$

sprawdzenie że jest to relacja równoważności wymaga sprawdzenia. Relacja równoważności musi być zwrotna, symetryczna i przechodnia. Powyższa jest z całą pewnością zwrotna: $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \varphi^j} = \delta^i_j$ $\frac{\partial}{\partial \varphi^k}(\delta^i_j) = 0$.

Czy jest zwrotna i przechodnia sprawdza się także bezpośrednim rachunkiem. W każdym punkcie mamy teraz przestrzeń klas równoważności układów współrzędnych. Ustalając zbiór otwarty $\mathcal{O}$ i układ współrzędnych (y^i) możemy każdej klasie przypisać układ liczb $\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^k \partial y^j}$ charakteryzujący tę klasę. W ten mniej więcej sposób możemy pokazać że klasy równoważności układów współrzędnych tworzą wiązkę nad rozmaitością. Wybór koneksji w TM polega na wyborze jednej klasy równoważności w każdym punkcie (w sposób gładki).

Jak to się ma do poprzednich sformułowań? Załóżmy, że mamy koneksję na TM w sensie J.Kijowskiego tzn w każdym punkcie klasa równoważności układów współrzędnych. Wybierzmy $q \in \mathcal{O} \subset M$. W punkcie q wybieramy (φ^i) - reprezentanta wyróżnionej klasy. Pola wektorowe $e_i = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ określone są w otoczeniu q. Weźmy $v \in T_qM$. Wtedy $v = v^i e_i$. Jak wygląda podprzestrzeń horyzontalna w punkcie v? Jest to przestrzeń styczna do cięcia

$$M \ni m \longrightarrow v^i e_i(m) \in TM$$

$m \overset{\sigma}{\longmapsto} v^i e_i(m)$ Wybierzmy w ϑ układ współrzędnych (y^i)

$$e_i = \frac{\partial}{\partial \varphi^i} = \frac{\partial y^j}{\partial \varphi^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$m \overset{\sigma}{\longmapsto} \underbrace{v^i \frac{\partial y^j}{\partial \varphi^i}(m)}_{\sigma^j} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Przestrzeń horyzontalna to przestrzeń styczna do cięcia σ. Rozpinają ją wektory $T\sigma\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)$

$$T\sigma\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y^k} + \underbrace{\frac{\partial \sigma^j}{\partial y^k}}_{\text{liczymy to!}} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$\frac{\partial \sigma^j}{\partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k}\left(v^i \frac{\partial y^j}{\partial \varphi^i}(\varphi(y))\right) = v^i \frac{\partial^2 y^j}{\partial \varphi^l \partial \varphi^i}\frac{\partial \varphi^l}{\partial y^k} = \frac{\partial^2 y^j}{\partial \varphi^l \partial \varphi^i}\frac{\partial \varphi^l}{\partial y^k} v^i =$$

zamienić współrzędne z φ do y

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 y^j}{\partial \varphi^l \partial \varphi^i}\frac{\partial \varphi^l}{\partial y^k}\frac{\partial \varphi^i}{\partial y^n}}}_{\Gamma^j_{kn}} u^n$$

$v^i e_i = u^j \frac{\partial}{\partial y^j}$

$v^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^k} u^k$

Wektor horyzontalny zaczepiony w (y^i, u^k)

$$T\sigma\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y^k} - \Gamma^j_{ik} u^k \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Dowolny wektor $a^k \frac{\partial}{\partial y^k} + b^l \frac{\partial}{\partial y^l}$ rozkładamy na część poziomą

$a^k \frac{\partial}{\partial y^k} - \Gamma^j_{ik} u^i a^k \frac{\partial}{\partial y^j}$ i pionową $\underbrace{\left(b^j + \Gamma^j_{ik} u^i a^k\right)}\frac{\partial}{\partial y^l}$

tak wyglądał odpowiedni fragment naszego odwzorowania Γ.

Zauważmy że nasze Γ^i_{jk} są zawsze symetryczne ze względu na dolne indeksy. W ten sposób można więc zdefiniować tylko szczególne koneksje. Czy to się w ogóle da jakoś uogólnić na ogólne liniowe koneksje w wiązce wektorowej? Owszem, da się, ale zamiast układami współrzędnych trzeba posłużyć się reperami. Zadanie do samodzielnej pracy: zdefiniować liniową koneksję w wiązce $E \to M$ jako wybór w każdym punkcie klasy równoważności cięć wiązki reperów względem stosownie dobranej relacji równoważności.

PRZYKŁAD Na płaszczyźnie we wsp. biegunowych

$(y^i) \to (r, \varphi) \to$

$(\varphi^i) \to (x^1, x^2)$

$$\Gamma^r_{\varphi r} = \frac{\partial r}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial \varphi}\frac{\partial x^j}{\partial r} = \frac{\partial^2 r}{(\partial x^1)^2}\frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^1 \partial x^2}\frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\frac{\partial x^2}{\partial r} +$$

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \qquad \frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{x^i}{r} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\delta_{ij} r - \frac{x_j}{r} x^i}{r^2} = \frac{r^2 \delta_{ij} - x_i x_j}{r^3}$$

$$+ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2 \partial x^1}\frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial^2 r}{(\partial x^2)^2}\frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\frac{\partial x^2}{\partial r} = \frac{r^2 \sin^2\varphi}{r^3}\cancel{(-r\sin\varphi)}\cos\varphi + \frac{-r^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\cancel{r^3}}(-r\sin\varphi)$$

$$+ \frac{-r^2 \sin\varphi\cos\varphi}{r}\cancel{r}\cos\varphi\cos\varphi + \frac{r^2\cos^2\varphi}{r^3}\, r\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

$x^1 = r\cos\varphi$

$x^2 = r\sin\varphi$

Wspomniałam przed chwilą że w ten sposób (tzn za pomocą klas równoważności układów współrzędnych da się wyreprezentować tylko szczególny rodzaj koneksji, tzn koneksję symetryczną. Co to jednak znaczy "koneksja symetryczna" w sensie geometrycznym? Na wiązce stycznej (i tylko na wiązce stycznej) możemy wprowadzić pewną wielkość charakteryzującą koneksję: torsję

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

pola wektorowe na M

na oko $T: \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ wydaje się że T zależy od X i Y w sposób różniczkowy. Okazuje się że jednak nie!

$$T(fX,Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX,Y] = f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - \cancel{(Yf)}X - f[X,Y] + \cancel{(Yf)}X =$$

$$= f\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\right) = fT(X,Y)$$

Widać także, że $T(X,Y) = -T(Y,X)$ oraz T jest dwuliniowe. Wnioskujemy zatem że T jest tensorem!

$$T: TM\times_M TM \to TM \quad \text{i.e. } T \text{ jest cięciem } T^*M\otimes_M T^*M\otimes TM \to M$$

albo nawet (antysymetria) $\Lambda^2 T^*M \otimes_M TM \to M$ (dwuforma o wartościach wektorowych)

Jak T wygląda we współrzędnych? Policzymy:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = \cancel{X^i\partial_i Y^j}\partial_j + \Gamma^j_{ik}X^iY^k\partial_j - \cancel{Y^i\partial_i X^j}\partial_j - \Gamma^j_{ik}Y^iX^k +$$

$$-(\cancel{X^i\partial_i Y^j} - \cancel{Y^i\partial_i X^j})\partial_j = \Gamma^j_{ik}X^iY^k\partial_j - \Gamma^j_{ki}Y^kX^i\partial_j =$$

$$X^iY^k\underbrace{\left[\Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}\right]}_{T^j_{ik}}\partial_j \qquad T^j_{ik} = \Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}$$

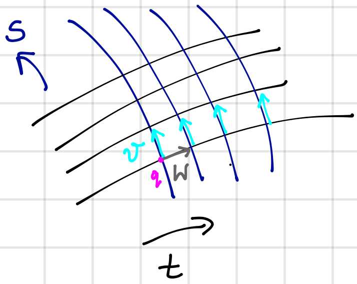
koneksje symetryczne = beztorsyjne!

Lubimy na tym wykładzie na każdy obiekt geometryczny popatrzeć z wielu stron. Koneksję definiowaliśmy podając dystrybucję horyzontalną lub odwzorowanie Γ z nią związane albo podając pochodną kowariantną. Torsję zdefiniowaliśmy za pomocą pochodnej kowariantnej. Czy potrafilibyśmy wyrazić torsję za pomocą H lub Γ? Wyrażenie za pomocą Γ jest dość paskudne ale H można wykorzystać bardzo łatwo.

Otóż H jest dystrybucją na M, tzn w szczególności podzbiorem TTM. Iterowana wiązka styczna wyposażona jest w pewne kanoniczne odwzorowanie

$$\kappa_M: TTM \to TTM$$

Element z TTM reprezentować można odwzorowaniem $\chi: \mathbb{R}^2 \to M$ w następujący sposób:



$$\mathbb{R}^2 \ni (t,s) \longmapsto \chi(t,s) \in M$$

$$\chi(0,0) = q$$

$$t \longmapsto \frac{d}{ds} \chi(t,\cdot)\Big|_{s=0}$$

krzywa w TM, wektor styczny do niej to

$$TTM \ni u = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\chi(\cdot,\cdot)\Big|_{\substack{s=0\\t=0}}$$

$$\tau_{TM}(u) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \chi(0,\cdot) = v$$

$$T\tau_M(u) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \chi(\cdot,0) = w$$

$\kappa_M(u)$ jest elementem TTM reprezentowanym przez $\bar{\chi}(t,s) = \chi(s,t)$

$$\kappa_M(u) = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\bar{\chi}(\cdot,\cdot)\Big|_{\substack{t=0\\s=0}}$$

Odwzorowanie κ_M we współrzędnych to $(x,\dot{x},\delta x,\delta\dot{x}) \longmapsto (x,\delta x,\dot{x},\delta\dot{x})$ jest liniowe ze względu na obie struktury wiązki wektorowej w TTM.

STWIERDZENIE Koneksja jest beztorsyjna wtedy i tylko wtedy gdy $\kappa_M(H) = H$

DOWÓD: Rachunek we współrzędnych. $\Rightarrow$ Załóżmy że koneksja jest beztorsyjna. Horyzontalny wektor u zaczepiony w $(x^i,\dot{x}^i)$ ma postać $\delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{jk}\,\delta x^j \dot{x}^k \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$, tzn

$$u = (x^i, \dot{x}^j, \delta x^k, -\Gamma^i_{jk}\delta x^j \dot{x}^k)$$

$$\kappa_M(u) = (x^i, \delta x^k, \dot{x}^j, -\Gamma^i_{jk}\delta x^j \dot{x}^k) = (x^i, \delta x^k, \dot{x}^j, -\Gamma^i_{kj}\delta x^j \dot{x}^k)$$

$\kappa_M(u)$ jest zaczepiony w $(x^i, \delta x^k)$ i równy $\dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \Gamma^i_{kj}\delta x^j \dot{x}^k \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ czyli jest horyzontalny.

Mamy więc $\kappa_M(H) \subset H$, ale κ_M jest dyfeomorfizmem więc $\kappa_M(H) = H$.

$\Leftarrow$

Jeśli $\kappa_M(H) = H$ to dla u horyzontalnego $\kappa_M(u)$ też jest horyzontalny. Mamy więc

$$u = (x^i, \dot{x}^j, \delta x^k, -\Gamma^i_{jk}\delta x^j \dot{x}^k)$$

$$\kappa_M(u) = (x^i, \delta x^j, \dot{x}^k, \underbrace{-\Gamma^i_{jk}\delta x^j \dot{x}^k}) \in H.$$

Istnieje dokładnie jeden horyzontalny wektor zaczepiony w $(x^i, \delta x^j)$ i mający rzut styczny $(x^i, \dot{x}^j)$, jest to $(x^i, \delta x^j, \dot{x}^k, \underbrace{-\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\delta x^k})$

zatem

$$\Gamma^i_{jk}\delta x^j \dot{x}^k = \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j \delta x^k = \Gamma^i_{kj}\dot{x}^k \delta x^j \Rightarrow 0 = \underbrace{(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj})}_{=0 \text{ z dowolności } \delta x^j,\, \dot{x}^k}\delta x^j \dot{x}^k$$

Koneksje metryczne

Pochodną kowariantną związaną z koneksją możemy rozszerzyć na dowolne pole tensorowe. W szczególności zróżniczkować można formę dwuliniową tzn cięcie $T^*M \otimes_M T^*M \longrightarrow M$. Stosowny wzór we współrzędnych otrzymamy z warunku

$$\nabla_v(g(X,Y)) = (\nabla_v g)(X,Y) + g(\nabla_v X, Y) + g(X, \nabla_v Y) \qquad v\in TM, \quad X,Y \in \mathcal{X}(TM)$$

pole wektorowe

$$v^i\partial_i(g_{jk}X^jY^k) = (\nabla_v g)_{jk}X^jY^k + g_{ij}(\nabla_v X)^i Y^j + g_{ij}X^i \nabla_v Y^j$$

$$v^i(\partial_i g_{jk})X^jY^k + v^i g_{jk}\cancel{(\partial_i X^j)}Y^k + v^i \cancel{g_{jk}X^j}(\partial_i Y^k) = (\nabla_v g)_{jk}X^jY^k + g_{ij}(v^l\cancel{\partial_l} X^i + \Gamma^i_{kl}v^kX^l)Y^j +$$
$$g_{ij}X^i(\cancel{v^k\partial_k} Y^j + \Gamma^j_{kl}v^kY^l)$$

$$(\nabla_v g)_{jk}X^jY^k = v^i(\partial_i g_{jk})X^jY^k - g_{ij}\Gamma^i_{kl}v^kX^lY^j - g_{ij}\Gamma^j_{kl}v^kY^lX^i$$

$$(\nabla_v g)_{jk}X^jY^k = v^i(\partial_i g_{jk})X^jY^k - v^i\Gamma^l_{ij}g_{lk}X^jY^k - v^i\Gamma^l_{ik}g_{jl}X^jY^k$$

$$\boxed{(\nabla_{\partial_i} g)_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma^l_{ij}g_{lk} - \Gamma^l_{ik}g_{jl}}$$

Niech teraz M będzie rozmaitością z metryką. Koneksję w TM nazywamy **metryczną** jeśli $\forall v\in TM \quad \nabla_v g = 0$.

TWIERDZENIE (Tullio Levi-Civita)

Na rozmaitości z metryką istnieje dokładnie jedna koneksja metryczna i beztorsyjna.

DOWÓD: Wypiszmy warunek metryczności trzy razy, zmieniając cyklicznie nazwy indeksów

$$-\partial_i g_{jk} + \Gamma^l_{ij}g_{lk} + \Gamma^l_{ik}g_{jl} = 0$$
$$\partial_j g_{ki} - \Gamma^l_{jk}g_{li} - \Gamma^l_{ji}g_{kl} = 0$$
$$+\quad \partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ki}g_{lj} - \Gamma^l_{kj}g_{il} = 0$$
$$\overline{\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk} - 2\Gamma^l_{kj}g_{il} = 0}$$

Niebieskie i zielone upraszczają się zaś fioletowe dodają jeśli założymy beztorsyjność. Mamy więc

$$g_{il}\Gamma^l_{kj} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}) \qquad / g^{im}, \sum_i$$

$$\Gamma^m_{kj} = \frac{1}{2}g^{im}(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk})$$

$\Gamma^m_{kj} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}\right)$ Mając g możemy zatem jednoznacznie wyliczyć Γ. $\blacksquare$

Własności tensora krzywizny:

Tensor krzywizny R zdefiniowaliśmy za pomocą dystrybucji horyzontalnej. Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że na wiązce $E \to M$ z koneksją zachodzi wzór $R(X,Y,\sigma) = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma$

Jeśli $E = TM$ mamy więc, dla $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$ Z definicji wynika że $R(X,Y,Z) = -R(Y,X,Z)$

Jeśli pracujemy z koneksją Levi-Civity możemy używać także R z opuszczonym indeksem

$$R(X,Y,Z,U) = g(U, R(X,Y,Z)) \qquad R_{ijkl} = g_{lm} R^m{}_{ijk}$$

Tensor ten ma więcej symetrii niż tylko ta związana z zamianą X i Y. Własności R są w oddzielnym pliku.