GEOMETRIA II

WYKŁAD 8

geometria wiązki kostycznej

mechanika

Geometria wiązki kostycznej Przypominamy „ab ovo" co wiemy o wiązce kostycznej: M - rozmaitość. Przestrzeń T^*_qM definiujemy jako zbiór klas równoważności par (q,f), $q\in M$, $f\in C^\infty(M)$ względem relacji $(q,f)\sim(q',f') \iff q=q',\ \forall \gamma: \gamma(0)=q\ \ \frac{d}{dt} f\circ\gamma|_{t=0} = \frac{d}{dt} f'\circ\gamma|_{t=0}$. Klasę pary (q,f) oznaczamy $df(q)$ i nazywamy różniczką f w punkcie q.

Pokazujemy następnie że T^*_qM jest przestrzenią wektorową ze strukturą odziedziczoną po $C^\infty(M)$. Znajdujemy wymiar tej przestrzeni pokazując, że przestrzeń T^*_qM jest rozpięta przez różniczki funkcji współrzędnościowych $(dx^1,\dots,dx^n)$. Te same różniczki pozwalają wykazać że T^*M jest rozmaitością (używamy współrzędnych (x^i,p_j): $x^i(df(q)) = x^i(q)$ $p_j(df(q)) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(q)$) i wiązką wektorową: $\pi_M: T^*M \longrightarrow M$. Wszystko co przypomnieliśmy do tej pory to rzeczy już nam znane i wielokrotnie wykorzystywane. Dalej przechodzimy do rzeczy nowych:

Rozważmy TT^*M. Jest to wiązka styczna, mamy więc rzut $\tau_{T^*M}: TT^*M \longrightarrow T^*M$. Istnieje też odwzorowanie styczne do rzutu π_M: $T\pi_M: TT^*M \longrightarrow TM$. Diagram

$$\begin{tikzcd} & TT^*M \arrow[dl, "T\pi_M"'] \arrow[dr, "\tau_{T^*M}"] & \\ TM \arrow[dr, "\tau_M"'] & & T^*M \arrow[dl, "\pi_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

jest przemienny. W szczególności oznacza to, że dla $v\in TT^*M$ wektor $T\pi_M(v)$ i kowektor $\tau_{T^*M}(v)$ są zaczepione w tym samym punkcie. Można je na sobie obliczyć, istnieje więc odwzorowanie

$$\vartheta_M: TT^*M \ni v \longmapsto \langle \tau_{T^*M}(v), T\pi_M(v)\rangle \in \mathbb{R}$$

Odwzorowanie $T\pi_M$ jest liniowe (jako odwz. styczne) tzn $T\pi_M(\lambda v+\mu w) = \lambda T\pi_M(v) + \mu T\pi_M(w)$. Mamy więc

$$\vartheta_M(v+w) = \langle \underset{\tau_{T^*M}(v)=\tau_{T^*M}(w)}{\underset{\|}{\tau_{T^*M}(v+w)}}, \underset{T\pi_M(v)+T\pi_M(w)}{\underset{\|}{T\pi_M(v+w)}}\rangle = \langle \tau_{T^*M}(v), T\pi_M(v)\rangle + \langle \tau_{T^*M}(w), T\pi_M(w)\rangle = \vartheta_M(v)+\vartheta_M(w)$$

$$\vartheta_M(\lambda v) = \langle \tau_{T^*M}(\lambda v), T\pi_M(\lambda v)\rangle = \langle \tau_{T^*M}(v), \lambda T\pi_M(v)\rangle = \lambda\vartheta_M(v)$$

ϑ_M jest więc liniowym odwzorowaniem $TT^*M\longrightarrow\mathbb{R}$ a więc jednoformą (gładką). ϑ_M jest więc cięciem $T^*T^*M\longrightarrow T^*M$. Jest to obiekt kanoniczny. ϑ_M nazywamy formą Liouville'a.

We współrzędnych:

Weźmy $v = \dot x^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \dot p_j\frac{\partial}{\partial p_j}$ zaczepiony w $p = p_j dx^j$. Wtedy $\tau_{T^*M}(v) = p = p_j dx^j$ i $T\pi_M(v) = \dot x^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Zatem $\vartheta_M(v) = \langle p_j dx^j, \dot x^i\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle = \sum_i p_j\dot x^j$. Jako forma na T^*M ϑ_M musi się dać zapisać jako $a_i dx^i + b^j dp_j$. Zatem

$$p_j\dot x^j = \langle a_i dx^i + b^k dp_k, \dot x^j\frac{\partial}{\partial x^j} + \dot p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\rangle = a_i\dot x^i + \dot p_j b^j \Rightarrow a_i = p_i,\ b^j = 0$$

$$\boxed{\vartheta_M = p_j dx^j}$$

Rozważa się także $\omega_M = d\vartheta_M = d(p_j dx^j) = dp_j\wedge dx^j$ dwuformę na T^*M.

Forma ω_M jest niezdegenerowana i zamknięta, tzn jest formę symplektyczną na T^*M.

2

Niech ω będzie dwuformę na P. Parę (P, ω) nazywamy rozmaitością symplektyczną jeśli ω jest niezdegenerowana i zamknięta.

Forma ω_M zadaje odwzorowanie $\beta_M : TT^*M \longrightarrow T^*T^*M$ $\quad \beta_M(v) = \omega_M(\cdot, v)$.
Forma jest niezdegenerowane, więc β_M jest włókno po włóknie nad T^*M izomorfizmem liniowym. Jako odwzorowanie między rozmaitościami jest to dyfeomorfizm.
We współrzędnych:

$$\beta_M\left(\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{p}_j \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = -\dot{p}_j dx^j + \dot{x}^i dp_i$$

β_M jest dyfeomorfizmem, można je odwrócić. Zachowuje rzut na T^*M, więc przeprowadza cięcie na cięcie. Niech $f \in C^\infty(T^*M)$ Różniczce funkcji f (df) odpowiada więc pole wektorowe X_f dane wzorem

$$X_f = \beta_M^{-1} \circ df$$

pole hamiltonowskie funkcji f. Oznaczmy X^i i P_j współczynniki pola X_f, tzn

$$\beta_M\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + P_j \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial p_j} dp^j$$

$$\| $$

$$-P_j dx^j + X^i dp_i$$

$$\Rightarrow \quad -P_j = \frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad X^i = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

Pole wektorowe rozumieć można jako równanie różniczkowe (na krzywe całkowe) Jeśli więc $t \longmapsto (x^i(t), p_j(t))$ oznaczać ma krzywą całkową pola X_f to

$$\dot{x}^i = X^i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_j = P_j = -\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

jeśli użyjemy literki H zamiast f otrzymamy

$$\begin{cases} \dot{x}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial x^j} \end{cases}$$

czyli równanie które Państwu z całą pewnością coś przypominają

Trajektorie fazowe układu mechanicznego z hamiltonianem H są krzywymi całkowymi pola X_H

Oto kilka faktów dotyczących ϑ_M, ω_M, X_H itd

STWIERDZENIE

Niech α będzie dowolną formę różniczkową na M. Zachodzi wzór

$$\alpha^* \vartheta_M = \alpha$$

3

DOWÓD

Niech $v \in TM$ będzie dowolnym wektorem. Oznaczamy $q = \tau_M(v)$

$$\langle \alpha^* \vartheta_M, v\rangle = \langle \vartheta_M, T\alpha(v)\rangle = \langle \tau_{T^*M}(T\alpha(v)), T\pi_M(T\alpha(v))\rangle = \langle \alpha(q), v\rangle$$

punkt zaczepienia wektora $T\alpha(v)$ czyli $\alpha(q)$

dla dowolnych odwzorowań różniczkowalnych zachodzi
$T(f \circ g) = Tf \circ Tg$
$T\pi_M \circ T\alpha = T(\pi_M \circ \alpha) = T(id_M) = id_{TM}$

Skoro dla dowolnego v $\langle \alpha^* \vartheta_M, v\rangle = \langle \alpha(q), v\rangle$ to $\alpha^* \vartheta_M = \alpha$ □

STWIERDZENIE Niech ϕ_f oznacza potok pola X_f. Prawdziwy jest wzór

$$(\phi_f)_t^* \omega_M = \omega_M$$

DOWÓD Policzmy $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_{ft})^* \omega_M = \mathcal{L}_{X_f} \omega_M$

$$\mathcal{L}_{X_f} \omega_M = d(i_{X_f} \omega_M) + i_{X_f} d\omega_M = d(\omega_M(X_f, \cdot)) = d(-df) = 0$$ □

Odwzorowanie ϕ_{ft} jest więc tzw. odwzorowaniem kanonicznym. (Odwzorowanie kanoniczne to takie, które zachowuje formę symplektyczną.

STWIERDZENIE

$$f(\phi_{ft}(p)) = f(p)$$

DOWÓD: $\frac{d}{dt}(f(\phi_{ft}(p)) = \langle df(p), X_f(p)\rangle = \langle \omega_M(\cdot, X_f(p)), X_f(p)\rangle =$

$$= \omega_M(X_f(p), X_f(p)) = 0$$ □

Tzn. hamiltonian jest stały na trajektoriach fazowych.

W każdej symplektycznej rozmaitości wyróżnione są pewne typy podrozmaitości. Zacznijmy od przestrzeni wektorowej V z wyróżnioną niezdegenerowaną antysymetryczną dwuformą ω. Wiadomo, że wymiar V musi być parzysty. Forma ω zadaje odwzorowanie

$$\beta : V \longrightarrow V^* \quad \beta(v) = \omega(v, \cdot)$$ które jest antysamosprzężone, tzn. $\beta^* = -\beta$

Niech teraz W będzie podprzestrzenią w V. Definiujemy anihilator symplektyczny podprzestrzeni W

$$W^{\S} = \{ v \in V : \forall w \in W \quad \omega(v,w)=0 \}$$

STWIERDZENIE Jeśli $\dim V = 2n$, $\dim W = m$ to $\dim W^{\S} = 2n-m$

DOWÓD

$$W^{\S} = \beta^{-1}(W^{0}) \quad \beta \text{ jest izomorfizmem liniowym}$$

DEFINICJA $W \subset V$

W jest izotropowa jeśli $W \subset W^{\S}$ $\quad$ $\dim W \leq n$

W jest koizotropowa jeśli $W^{\S} \subset W$ $\quad$ $\dim W \geq n$

W jest lagranżowska jeśli $W^{\S} = W$ $\quad$ $\dim W = n$

W jest symplektyczna jeśli $W^{\S} \cap W = \{0\}$ $\quad$ $\dim W$ parzysty

Są oczywiście podprzestrzenie, które nie należą do żadnej kategorii.

Tym „typom" odpowiadają typy podrozmaitości w rozmaitości symplektycznej (P,ω)

DEFINICJA: Podrozmaitość $S \subset P$ jest odpowiednio izotropowa, koizotropowa, lagranżowska, symplektyczna jeśli dla każdego $p \in S$ przestrzeń styczna T_pS jest izotropowa, koizotropowa, lagranżowska, symplektyczna w (T_pP, ω_p).

PRZYKŁADY

(1) Niech α będzie jednoformą na M zamkniętą, tzn $d\alpha = 0$. Wtedy obraz tej formy, tzn $\alpha(M) \subset T^*M$ jest podrozmaitością lagranżowską w T^*M.

Istotnie: $\alpha(M)$ ma wymiar $m = \dim M$, ponadto $\alpha^*\omega_M = \alpha^* d\vartheta_M = d(\alpha^*\vartheta_M) = d\alpha = 0$. Każdy wektor styczny do $\alpha(M)$ jest postaci $T\alpha(v)$ dla $v \in TM$.

$$\omega_M(T\alpha(v), T\alpha(w)) = \alpha^*\omega_M(v,w) = 0 \quad \text{Zatem} \quad \forall v \quad \beta_M(T\alpha(v)) \in (T\alpha(M))^{0}$$

co w połączeniu z rachunkiem wymiarów daje $(T\alpha(M))^{\S} = T\alpha(M)$.

(2) Niech f będzie gładką funkcją na T^*M taką że $\forall p \in T^*M$ $df(p) \neq 0$ wtedy $f^{-1}(0)$ jest podrozmaitością koizotropową. Warunek $df \neq 0$ zapewnia (tw. o maksymalnym rzędzie) że $f^{-1}(0)$ jest podrozmaitością wymiaru $2n-1$. Takie podrozmaitości jest zawsze koizotropowe. Istotnie, niech p będzie punktem

podrozmaitości K wymiaru $2n-1$ (kowymiaru 1) $(T_pK)^\S$ ma wymiar 1. Weźmy $u \in T_pT^*M$ taki że $\langle u \rangle = (T_pK)^\S$. Jeśli $u \notin T_pK$ to dowolna baza $(v_1, \dots, v_{2n-1})$ przestrzeni T_pK i u tworzą bazę T_pT^*M. Jednocześnie $\omega_M(v_i, u) = 0$ i $\omega_M(u,u) = 0$ zatem ω_M musiałaby być zdegenerowana.

(3) Włókno wiązki $T^*M \longrightarrow M$ tzn. $\pi_M^{-1}(q) = T_q^*M$ jest podrozmaitością lagranżowską. Wymiar włókna jest M. Weźmy teraz X, Y – dwa pionowe pola wektorowe, tzn styczne do włókna i policzmy

$$\omega_M(X,Y) = d\vartheta_M(X,Y) = X\langle \vartheta_M, Y\rangle - Y\langle \vartheta_M, X\rangle - \langle \vartheta_M, [X,Y]\rangle = 0$$

$$\langle \vartheta_M, X\rangle = 0 = \langle \vartheta_M, Y\rangle = \langle \vartheta_M, [X,Y]\rangle$$

↗ nawias pionowych jest pionowy.

5

(4) Zadanie: Niech $C \subset M$ będzie podrozmaitością, $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ gładką funkcją. Definiujemy

$$L = \{ p \in T^*M : \pi_M(p) \in C, \ \forall v \in TC \ \langle p, v\rangle = \langle df, v\rangle \}$$

Wykazać, że L jest podrozmaitością lagranżowską

To jest zaledwie wstęp do geometrii symplektycznej i geometrii wiązki kostycznej. Chcemy jednak omówić pewne przykłady fizyczne, dlatego przechodzimy teraz do wiązki stycznej a następnie do lagranżowskiego i hamiltonowskiego opisu mechaniki.

Geometria wiązki stycznej – uzupełnienie. O geometrii wiązki stycznej wiemy bardzo wiele. Są jednak takie elementy tej geometrii, które jeszcze się nie pojawiły w naszych rozważaniach. Endomorfizm wertykalny S_M. Wiązka $\tau_M: TM \longrightarrow M$ jest wiązką wektorową, tzn istnieje operacja wertykalnego podniesienia $v \in TM$ do $w \in TM$ jeśli v, w są nad tym samym punktem.

$$v^V_w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (w + tv)$$

Weźmy teraz $u \in T_wTM$. Definiujemy $S(u) = [T\tau_M(u)]^V_w$, tzn u rzutujemy stycznie i podnosimy wertykalnie. S jest liniowe, zachowuje rzut na TM, jest więc morfizmem wiązki $\tau_{TM}: TTM \longrightarrow TM$. We współrzędnych:

$$u = \delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \delta \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \qquad T\tau_M(u) = \delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad w = \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad S(u) = \delta x^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}$$

$$S: (x, \dot{x}, \delta x, \delta \dot{x}) \longmapsto (x, \dot{x}, 0, \delta x)$$

Endomorfizm wertykalny zaraz nam się przyda. W klasycznej autonomicznej mechanice w sformułowaniu lagranżowskim ruch układu, którego przestrzenią konfiguracyjną jest rozmaitość M opisywany jest przy pomocy równań Eulera-Lagrange'a wyprowadzanych z zasady wariacyjnej. Jeśli w M używamy współrzędnych (x^i), a lagranżjan jest funkcją $L: TM \to \mathbb{R}$ to równanie E-L mają postać 6

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x^i}\right) = 0$$ jeżeli na układ nie działają siły zewnętrzne.

Jest to układ równań na krzywą $t \longmapsto (x^i(t))$ w M. Wykonując różniczkowanie po t stwierdzamy, że jest to układ równań drugiego rzędu:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot x^i}\dot x^k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot x^l \partial \dot x^j}\ddot x^l = 0$$

Formalnie rzecz biorąc równanie to zadaje podzbiór T^2M. Dodatkowo układ ten zadaje w sposób uwikłany $\ddot x$ jako funkcję $x, \dot x$. Układ daje się odwikłać jeśli macierz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot x^l \partial \dot x^j}$ jest odwracalna. Filozofia rozwiązywania układów równań postaci $\ddot x^i = F^i(x, \dot x)$ zakłada, że wprowadzając dodatkowe zmienne v^i zapisujemy układ w postaci

$$\begin{cases} \dot x^i = v^i \\ \dot v^j = \ddot x^j = F^j(x,v) \end{cases}$$

Taki układ równań zadaje pole wektorowe na TM:

$$V_F(x,v) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + F^j \frac{\partial}{\partial v^j}$$

Pole wektorowe pochodzące od równania drugiego rzędu spełniają szczególny warunek

$$S_M(V_F(x,v)) = \nabla_{TM}(x,v)$$

wartość pola Eulera w punkcie (x,v)

Można więc powiedzieć że S służy do sprawdzania czy pole wektorowe na TM jest równaniem pierwszego rzędu na TM czy też pochodzi od równania drugiego rzędu na M.

W dalszym ciągu wykładu zastanowimy się jak geometrycznie uzyskać równanie Eulera-Lagrange'a z lagranżjanu w przypadku, gdy równanie to da się odwikłać a następnie opiszemy sytuację w której odwikłać się nie da. Zrobimy to na przykładzie.

Zapiszmy jeszcze raz równanie E-L:

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} - \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot x^j}}_{H_{kj}}\dot x^k - \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot x^l \partial \dot x^j}}_{F_{lj}}\ddot x^l = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x^j} - H_{kj}(x,\dot x)\dot x^k - F_{lj}(x,\dot x)\ddot x^l = 0$$

Jeśli F_{lj} jest odwracalna to:

$$\ddot x^i = (F^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - H_{kj}\dot x^k\right)$$

Pole wektorowe, które odpowiada temu równaniu

$$X_{EL}(x,\dot x) = \dot x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (F^{-1})^{lj}\left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - H_{kj}\dot x^k\right)\frac{\partial}{\partial \dot x^l}$$

Jak to pole wektorowe skonstruować bez użycia współrzędnych? Rozważmy T^*TM:

$$\begin{tikzcd} & T^*TM \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi_{TM}"] & \\ T^*M & & TM \arrow[ll, "\lambda"] \arrow[ul, bend right, "dL"'] \end{tikzcd}$$

$$\lambda(v) = \xi \circ dL(v)$$

$$\lambda(v) = \lambda_i(x,\dot{x})\, dx^i$$

$$\lambda_i(x,\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(x,\dot{x})$$

Odwzorowanie $\lambda: TM \to T^*M$ przyporządkowuje prędkościom pędy. Jeśli np.

$$L(v) = \tfrac{1}{2} m g(v,v) \quad \text{to} \quad \lambda(v) = m g(v,\cdot)$$

$$L(x,\dot{x}) = \tfrac{1}{2} m g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j \qquad \lambda_j(x,\dot{x}) = m g_{ij}(x)\dot{x}^i$$

Macierz F jest macierzą pochodnej odwzorowania λ. Zgodnie z TLO jej odwracalność pociąga lokalną odwracalność odwzorowania λ. W takim przypadku mówimy że lagranżjan jest regularny. Jeśli λ jest globalnie odwracalne to lagranżjan jest hiperregularny.

Oznaczmy $\omega_L = \lambda^* \omega_M$. Dla regularnego lagranżjanu forma ω_L jest symplektyczna na TM.

TWIERDZENIE Równanie E-L dla regularnego lagranżjanu L jest reprezentowane przez pole wektorowe, które jest hamiltonowskim polem funkcji energii

$$E: TM \to \mathbb{R} \qquad E(v) = \langle \lambda(v), v\rangle - L(v) \quad \text{względem formy } \omega_L$$

DOWÓD: Skoro $X_{E\text{-}L}$ mamy dane we współrzędnych pozostają nam rachunki we współrzędnych.

$$\omega_L = \lambda^*\omega_M = \lambda^*(dp_i \wedge dx^i) = d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\wedge dx^i = \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot{x}^i} dx^k \wedge dx^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^l \partial \dot{x}^i} d\dot{x}^l \wedge dx^i =$$

$$= H_{kl}\, dx^k \wedge dx^i + F_{li}\, d\dot{x}^l \wedge dx^i$$

$$E(x,\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^l - L(x,\dot{x}) \qquad dE = \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial \dot{x}^i}\dot{x}^i dx^k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^l \partial \dot{x}^i}\dot{x}^i d\dot{x}^l - \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m} d\dot{x}^m}$$

$$+ \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} d\dot{x}^i}$$

$$= \left(H_{ki} - \frac{\partial L}{\partial x^i}\right) dx^i + F_{li}\dot{x}^i d\dot{x}^l$$

$$X = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \qquad \omega_L(\cdot, X) = \left(H_{kl}A^k - H_{lk}A^k + F_{lk}B^k\right) dx^l +$$

$$+ F_{ij}A^i d\dot{x}^j$$

z porównania $A^i = \dot{x}^i$ oraz $H_{ji}\dot{x}^j - \cancel{H_{ij}\dot{x}^j} + F_{ij}B^j = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \cancel{H_{ij}\dot{x}^j}$

$$\Rightarrow B^j = (F^{-1})^{jk}\left(\frac{\partial L}{\partial x^k} - H_{lk}\dot{x}^l\right) \quad \blacksquare$$

Zadanie: Znaleźć funkcję energii E, formę ω_L, odwzorowanie λ, pole X_{EL} we współrzędnych dla lagranżjanu mechanicznego

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m\, g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j - V(x)$$

dla $V \equiv 0$ porównać X_{EL} z równaniem na horyzontalne podniesienie krzywej dla koneksji metrycznej.

8

A CO KIEDY LAGRANŻJAN NIE JEST REGULARNY?

Rozważmy cząstkę swobodną w przestrzeni Minkowskiego. Wyjściowo mamy więc afiniczną przestrzeń M modelowaną na czterowymiarowej przestrzeni wektorowej V z wyróżnioną formą dwuliniową symetryczną η o sygnaturze $(+---)$. Zamiast tradycyjnej krzywej w M parametryzowanej czasem informacje o ruchu cząstki tkwi w jej linii świata, tzn jednowymiarowej zorientowanej podrozmaitości czasowej w M. Powstaje więc pytanie jak wybrać lagranżjan. Można to zrobić na dwa sposoby – albo linię świata parametryzować czasem własnym, wtedy wektory styczne do linii świata to czasowe wektory „długości 1". Wtedy, jakikolwiek nie byłby lagranżjan mamy układ z więzami. Drugi sposób – uznajemy parametryzację za nieważną – wtedy lagranżjan musi być dodatnio jednorodny żeby działanie nie zależało od parametryzacji.
Przyjmujemy drugie rozwiązanie do naszych rozważań

Niech $V_\pm$ oznacza zbiór wektorów z V takich że $\eta(v,v)>0$. $\pm$ odnosi się do orientacji w przód i w tył w czasie. Lagranżjan

$$L: M \times V_\pm \longrightarrow \mathbb{R} \qquad L(q,v) = m\sqrt{\eta(v,v)} = m\|v\|$$

$$TM = M \times V$$

Jest to lagranżjan dodatnio jednorodny. Działanie nie zależy od parametryzacji. Zbiór $M \times V_\pm$ jest otwarty w TM, zatem nie ma więzów.

Poszukajmy odwzorowania Legendre'a

$$\frac{\partial L}{\partial v} = m\frac{1}{2\sqrt{\eta(v,v)}}\, 2\eta(v,\cdot) = m\,\eta\left(\frac{v}{\|v\|},\cdot\right)$$

$\lambda(v) = \left(q, m\,\eta\left(\frac{v}{\|v\|},\cdot\right)\right)$ λ jest w sposób oczywisty nieodwracalne bo ma tę samą wartość na całym promieniu $\langle v \rangle$

W obrazie λ leżą jedynie te kowektory (q,p) które spełniają $\bar{\eta}(p,p)=m^2$ gdzie $\bar{\eta}$ jest iloczynem skalarnym na V^* indukowanym na V przez η.
tzn

$$u \in V \quad p = \eta(u,\cdot) \quad \bar{\eta}(p,p) = \eta(u,u)$$

Zobaczmy co się stanie jeśli zignorujemy fakt nieodwracalności λ:

Funkcja Energii

$$E(q,v)=\langle\lambda(q,v),(q,v)\rangle-L(q,v)=m\eta\left(\frac{v}{\|v\|},v\right)-m\|v\|=m\|v\|-m\|v\|=0$$

Forma ω_L

Forma ω_M na $T^*M=M\times V^*$ jest postaci

$$\omega_M\big((q,p,\delta q,\delta p),(q,p,\delta q',\delta p')\big)=\langle\delta p,\delta q'\rangle-\langle\delta p',\delta q\rangle$$

$$\omega_L=\lambda^*\omega_M \qquad \omega_L(u,u')=\omega_M(T\lambda(u),T\lambda(u'))$$

$u\in TTM$, tzn $u=(q,v,\delta q,\delta v)$

$$T\lambda(q,v,\delta q,\delta v)=\left(q,m\tilde{\eta}\left(\frac{v}{\|v\|}\right),\delta q,m\tilde{\eta}\left(\frac{\delta v}{\|v\|}\right)-\frac{m}{\|v\|^3}\eta(v,\delta v)\tilde{\eta}(v)\right)$$

$$\omega_L(u,u')=\left\langle\frac{m}{\|v\|}\tilde{\eta}(\delta v)-\frac{m\eta(v,\delta v)}{\|v\|^3}\tilde{\eta}(v),\delta q'\right\rangle-$$
$$\left\langle\frac{m}{\|v\|}\tilde{\eta}(\delta v')-\frac{m\eta(v,\delta v')}{\|v\|^3}\tilde{\eta}(v),\delta q\right\rangle=$$
$$=\frac{m}{\|v\|}\left[\eta(\delta v,\delta q')-\eta(\delta v',\delta q)\right]-\frac{m}{\|v\|^3}\left[\eta(v,\delta v)\eta(v,\delta q')-\eta(v,\delta v')\eta(v,\delta q)\right]$$

ω_L jest zdegenerowana. Formalnie możemy jednak napisać warunek na wektory $X\in TTM$ podobny do df pola hamiltonowskiego. Nie będzie to pole hamiltonowskie, tylko pewien zbiór wektorów

$$\omega_L(\cdot,X)=dE=0 \qquad X=(q,v,\delta q^X,\delta v^X)$$

$X:\ \forall\delta v,\delta q$

$$0=\frac{m}{\|v\|}\left[\eta(\delta v,\delta q^X)-\eta(\delta v^X,\delta q)\right]-\frac{m}{\|v\|^3}\left[\eta(v,\delta v)\eta(v,\delta q^X)-\eta(v,\delta v^X)\eta(v,\delta q)\right]=0$$

$$\frac{m}{\|v\|}\eta(\delta v,\delta q^X)-\frac{m}{\|v\|^3}\eta(v,\delta v)\eta(v,\delta q^X)=\frac{m}{\|v\|}\left[\eta(\delta v,\delta q^X)-\eta\left(\delta v,\frac{\eta(v,\delta q^X)}{\|v\|^2}v\right)\right]=$$
$$=\frac{m}{\|v\|}\eta\Big(\delta v,\underbrace{\delta q^X-\eta\left(\frac{v}{\|v\|},\delta q^X\right)\frac{v}{\|v\|}}_{=0}\Big)$$

$$0=-\frac{m}{\|v\|}\eta(\delta v^X,\delta q)+\frac{m}{\|v\|^3}\eta(v,\delta v^X)\eta(v,\delta q)=-\frac{m}{\|v\|}\eta\Big(\delta q,\underbrace{\delta v^X-\eta\left(\frac{v}{\|v\|},\delta v^X\right)\frac{v}{\|v\|}}_{=0}\Big)$$

$$\delta q_v^x - \eta\left(\frac{v}{\|v\|}, \delta q_v^x\right)\frac{v}{\|v\|} = 0 \qquad\qquad \delta v^x - \eta\left(\frac{v}{\|v\|}, \delta v^x\right)\frac{v}{\|v\|} = 0$$

$$\delta q_v^x = \eta\left(\underbrace{\frac{v}{\|v\|}}_{e_v}, \delta q_v^x\right)\frac{v}{\|v\|}$$

j.w. δv^x jest proporcjonalne do e_v

$$\delta q_v^x = \eta(e_v, \delta q_v^x)\, e_v$$

δq_v^x jest proporcjonalne do e_v

zamiast pola X_{E-L} mamy podzbiór

$$X = \{(q, v, av, bv)\ \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Możemy go uważać za równanie różniczkowe na krzywe s w $TM = M \times V$

$$s \longmapsto q(s), v(s) \ :\ \dot q(s) \in \langle v(s) \rangle, \quad \dot v(s) \in \langle v(s) \rangle$$

położenie może się zmieniać wzdłuż prędkości (która ma stały kierunek)

prędkość może zmieniać długość

Rozwiązaniem są więc czasowe niesparametryzowane proste. Wynik jest sensowny: zgubiliśmy jedynie orientację. Nie bardzo możemy uzyskać w ten sposób opis hamiltonowski – potrzebujemy uogólnienia!

Popatrzmy na następujący, niekompletny diagram:

$$\begin{tikzcd}
T^*T^*M \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & & TT^*M \arrow[ll, "\beta_M"'] \arrow[dr] & & T^*TM \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T^*M \arrow[u, bend left, "dH"] & & & T^*M \arrow[ul, bend left, "X_H"] & & TM \arrow[ul, bend right, "dL"'] \arrow[ll, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Jeśli lagranżjan nie jest regularny nie potrafimy przejść do hamiltonianu i wyprodukować pola wektorowego na T^*M. Odpowiednie uogólnienie otrzymamy jednak rozważając zamiast różniczek funkcji lagranżowskie podrozmaitości T^*T^*M i T^*TM. Okazuje się, że diagram można domknąć pewnym izomorfizmem

$$\begin{tikzcd}
T^*T^*M \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & & TT^*M \arrow[ll, "\beta_M"'] \arrow[dr] \arrow[rr, "\alpha_M"] & & T^*TM \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T^*M \arrow[u, bend left, "dH"] & & & T^*M \arrow[ul, bend left, "X_H"] & & TM \arrow[ul, bend right, "dL"'] \arrow[ll, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

który w przypadku regularnym ma następującą własność

$$\alpha_M^{-1}(dL(TM)) = \beta_M^{-1}(dH(T^*M)) = X_H(T^*M)$$

W przypadku nieregularnym nie będziemy mieli H, ale podrozmaitości lagranżowskie na wszystkich trzech miejscach będą:

11

$$\begin{array}{ccccc} T^*T^*M & \xleftarrow{\beta_M} & TT^*M & \xrightarrow{\alpha_M} & T^*TM \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \beta_M(D) & & D & & dL(TM) \end{array}$$

Zamiast obrazu pola wektorowego mamy $D = \alpha_M^{-1}(dL(TM)) \subset TT^*M$. Jest to równanie różniczkowe na krzywe w T^*M w wersji niejawnej i zapewne nie dające się odwikłać. Zobaczmy co dostaniemy w naszym przykładzie dla cząstki swobodnej w przestrzeni Minkowskiego M.

$T^*M \simeq M\times V^*$ $\quad TT^*M \simeq M\times V^*\times V\times V^*$ $\quad TM \simeq M\times V$ $\quad T^*TM \simeq M\times V\times V^*\times V^*$

$$\alpha_M : M\times V^*\times V\times V^* \ni (q,p,v,\dot p) \longmapsto (q,v,\dot p,p) \in M\times V\times V^*\times V^*$$

Dla $L(q,v) = m\sqrt{\eta(v,v)}$

$$dL(q,v) = \left(q, v, 0, m\,\frac{\eta(v,\cdot)}{\|v\|}\right)$$

$$\dot p = 0 \qquad p = m\,\eta\left(\frac{v}{\|v\|},\cdot\right)$$

$$D = \left\{(q,p,v,\dot p) : p = m\,\eta\left(\frac{v}{\|v\|},\cdot\right),\ \dot p = 0\right\}$$

Wiemy już, że $\eta(p,p) = m^2$. Wektor v jest związany z p warunkiem

$p = m\,\eta\left(\frac{v}{\|v\|},\cdot\right)$, oznaczając $\tilde\eta : V \to V^*$ $\quad \tilde\eta(v) = \eta(v,\cdot)$

$p = m\tilde\eta\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ $\quad \frac{1}{m}\tilde\eta^{-1}(p) = \frac{v}{\|v\|}$. p wyznacza więc kierunek wektora v, inaczej $v = r\cdot\tilde\eta^{-1}(p)$ dla $r>0$

$$D = \left\{(q,p,v,0) : \eta(p,p) = m^2,\ v = r\tilde\eta(p) \quad r>0\right\}$$

Trajektorie fazowe $s \mapsto (q(s), p(s))$ są więc czasowymi zorientowanymi prostymi w części w M i stałe w części V^*. W stosunku do równania E-L wyprowadzonego wcześniej mamy dodatkową orientację, tzn rozróżniamy cząstki i antycząstki na poziomie klasycznym.

D nie jest generowane przez hamiltonian w sensie funkcji na T^*M. Hamiltonian zawsze daje pole wektorowe a tu równanie polem wektorowym nie jest. Oddaje jednak dość dokładnie fizyczną rzeczywistość przynajmniej w przybliżeniu klasycznym.