Krzywizna i Torsja

Wojciech Zwoliński

08.03.2017

Naszym celem jest wyprowadzenie jawnej postaci krzywizny i torsji dla krzywej zadanej w postaci parametrycznej. Niech dana będzie krzywa w postaci parametrycznej.

$$\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

Gdzie $\mathbb{R}^3$ jest przestrzenią unitarną wyposażoną w standardowy iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy. $|\mathbf{x}|$ oznacza długość wektora $\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.
Przez zmienne primowane(') będę rozumiał różniczkowanie po parametrze krzywej tj: $\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$
Długość krzywej wyraża się następująco:

$$\frac{ds}{dt} = |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = |\mathbf{r}'|$$

i trzy wektory jednostkowe stanowiące bazę zdefiniowane następująco ze wzorów Freneta-Serreta

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad |\mathbf{T}| = 1 \quad |\mathbf{N}| = 1 \quad |\mathbf{B}| = 1$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} \tag{1}$$

Gdzie κ- oznacza krzywiznę, a τ -torsje
Dowód Wyprowadźmy następujące tożsamości:

$$\mathbf{T} = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds} = \mathbf{r}'\frac{dt}{ds}$$

$$\mathbf{r}' = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} \tag{2}$$

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}' \tag{3}$$

$$\mathbf{r}''' = \frac{d^3s}{dt^3}\mathbf{T} + 2\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}' + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'' \tag{4}$$

Zauważmy także że:

$$|\mathbf{T}| = 1 \to \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} = 0 \to |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = |\mathbf{T}'|$$

Teraz biorąc iloczyn wektorowy równań (2) i (3)

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (\frac{ds}{dt})^2\mathbf{T} \times \mathbf{T}' = (\frac{ds}{dt})^2\mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = (\frac{ds}{dt})^3\kappa\mathbf{T} \times \mathbf{N} \tag{5}$$

Co po wzięciu długości daje od razu:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \tag{6}$$

Aby znaleźć torsję weźmy iloczyn skalarny równań (5) i (4)

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''' = (\frac{ds}{dt})^4\kappa(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot \mathbf{T}'' \tag{7}$$

Pozostaje tylko znaleźć postać $\mathbf{T}''$:

$$\mathbf{T}'' = \frac{d\mathbf{T}'}{dt} = \frac{d(\kappa\frac{ds}{dt}\mathbf{N})}{dt} = \frac{d(\kappa\frac{ds}{dt})}{dt}\mathbf{N} + \kappa\frac{ds}{dt}\mathbf{N}' = \frac{d(\kappa\frac{ds}{dt})}{dt}\mathbf{N} + \kappa(\frac{ds}{dt})^2\frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

Co na mocy (1) daje:

$$\mathbf{T}'' = \frac{d(\kappa\frac{ds}{dt})}{dt}\mathbf{N} + \kappa(\frac{ds}{dt})^2\tau\mathbf{B} - \kappa^2(\frac{ds}{dt})^2\mathbf{T} \tag{8}$$

Podstawiając (8) do (7) i pamiętając że $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ tworzą bazę ortonormalną więc $|(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot \mathbf{B})| = 1$

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''' = (\frac{ds}{dt})^6\kappa^2\tau(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot \mathbf{B}) = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2\tau$$

Co daje szukaną zależność

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} \tag{9}$$