

Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

26 stycznia 2014

1 Powierzchnie zanurzone

Tegoroczna wersja wykładu z geometrii różniczkowej będzie różniła się od poprzedniej kolejnością materiału. Zgodnie z sugestiami słuchaczy zajmiemy się na początku jedynie powierzchniami zanurzonymi. Przedyskutujemy w tym kontekście przestrzenie styczne i kostyczne oraz wszelkie kwestie praktyczne związane z analizą na powierzchniach, całkowaniem i narzędziami potrzebnymi w niektórych teoriach pola, np. w elektrodynamice. Następnie przejdziemy do pojęć bardziej abstrakcyjnych, tzn. do pojęcia rozmaitości.

Zanim przypomnimy definicję powierzchni zanurzonej zastanówmy się jakie struktury przestrzeni \mathbb{R}^n były dotychczas używane w trakcie zajęć z analizy. Z całą pewnością używaliśmy naturalnej topologii na \mathbb{R}^n , gdyż mowa była o ciągłości odwzorowań oraz o zbieżności ciągów. Nauczyliśmy się także różniczkować funkcje wielu zmiennych. Przypomnijmy definicję pochodnej funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x \in \mathbb{R}^n$: Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x jeśli istnieje odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x+h) = f(x) + Fh + R(x,h),$$

gdzie R jest resztą, tzn. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|R(x,h)|}{\|h\|} = 0$. Do zapisania ostatniego wzoru potrzebna jest norma, czyli możliwość obliczania długości wektora. Tak długo jak używamy jedynie przestrzeni skończonego wymiaru wybór tej normy nie jest istotny - wszystkie normy są równoważne. Odwzorowanie liniowe F nazywaliśmy pochodną f w punkcie x i oznaczaliśmy $f'(x)$, albo jakoś podobnie. W dalszym ciągu istotną będzie następująca obserwacja: We wzorze definiującym pochodną przestrzeń \mathbb{R}^n pojawia się w dwóch rolach. Po pierwsze jest to dziedzina funkcji f a po drugie przestrzeń zawierająca przyrosty h . W przestrzeni \mathbb{R}^n będącej dziedziną funkcji nie używa się struktury wektorowej, a jedynie możliwości przemieszczania się od punktu do punktu za pomocą elementów przestrzeni wektorowej. Struktura liniowa istotna jest w przestrzeni przyrostów, używamy bowiem pojęcia odwzorowania liniowego na przestrzeni przyrostów. Mówiąc językiem algebraicznym w dziedzinie funkcji f używamy jedynie struktury afinicznej. Przestrzeń afiniczna wygląda jak przestrzeń wektorowa, której ktoś "ukradł zero".

Definicja 1 *Przestrzeń afiniczną* nazywamy trójkę $(A, V, +)$, gdzie A jest zbiorem, V przestrzenią wektorową a $+$ odwzorowaniem $+: A \times V \rightarrow A$ o następujących własnościach

1. $\forall a \in A, v, w \in V \quad a + (v + w) = (a + v) + w,$
2. $\forall a \in A \quad a + 0 = a,$

3. dla każdych dwóch $a, b \in A$ istnieje dokładnie jeden wektor $v \in V$ taki, że $a + v = b$

Każda przestrzeń wektorowa jest więc w szczególności przestrzenią afiniczną. Każda zaś przestrzeń afiniczna staje się wektorowa, jeśli wyróżnimy w niej jeden punkt - wektor zerowy. W przestrzeni afinicznej wektor definiowany jest przez uporządkowaną parę punktów (własność (3), patrz szkolna definicja wektora). Wektor v o którym mowa w (3) nazywać będziemy różnicą punktów b i a . Bedziemy także pisać $v = b - a$. Mówimy, że przestrzeń afiniczna A jest *modelowana* na przestrzeni wektorowej V . Wprowadzamy także pojęcie wymiaru przestrzeni afinicznej - jest on równy wymiarowi modelowej przestrzeni wektorowej. W skończonym wymiarze struktura afiniczna w zupełności wystarcza do zdefiniowania pochodnej funkcji. Niech więc A będzie przestrzenią afiniczną skończonego wymiaru modelowaną na przestrzeni wektorowej V , niech także f oznacza funkcję na A . Powiemy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $a \in A$ jeśli istnieje funkcjonal liniowy $F \in V^*$ taki, że

$$f(a + v) = f(a) + Fv + R(a, v),$$

gdzie $R(a, v)$ ma własność reszty, tzn $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R(a, v)|}{\|v\|} = 0$. Długość $\|v\|$ liczona może być w dowolnej normie na przestrzeni V . Funkcjonał F możemy nazywać pochodną funkcji f w punkcie a . Dzięki oczywistym różnicom między A i V , a tym bardziej V^* , łatwo zidentyfikować obiekty geometryczne odpowiadające funkcji, pochodnej, przyrostowi itd. W sytuacji, kiedy wszystkie przestrzenie to \mathbb{R}^n łatwo o pomyłkę. Na przestrzeni A zdefiniować możemy także wyższe pochodne, rozważać klasy funkcji ciągłych, różniczkowalnych, różniczkowalnych k razy czy gładkich. najłatwiejsze praktyczne kryterium sprawdzania różniczkowalności odwzorowań między przestrzeniami afinicznymi jest zapisanie ich w układzie współrzędnych. Zauważmy, że wybranie punktu $a_0 \in A$ oraz bazy e w V definiuje bijekcję

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow A, \quad \Phi(x^1, \dots, x^n) = a_0 + \sum_i x^i e_i.$$

Bijekcja ta jest odwzorowaniem afinicznym a więc gładkim. Φ traktujemy jako afiniczny układ współrzędnych w A . Ponieważ zmiana układu współrzędnych prowadzi do afinicznego (także gładkiego) odwzorowania z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n różniczkowalność, czy stopień gładkości można badać w dowolnym układzie współrzędnych. Od tej pory będziemy uważali, że potrafimy różniczkować funkcje na przestrzeni afinicznej i odwzorowania między przestrzeniami afinicznymi. W praktyce będziemy pewnie i tak używali \mathbb{R}^n . Warto jednak wiedzieć z której z rozlicznych struktur \mathbb{R}^n właśnie korzystamy definiując jakiś obiekt, czy wykonując rachunki.

Żeby się przekonać o przydatności pojęcia przestrzeni afinicznej spójrzmy jeszcze na dwie dodatkowe definicje:

Definicja 2 *Czasoprzestrzeni Newtona* nazywamy przestrzeń afiniczną N modelowaną na czterowymiarowej przestrzeni wektorowej V wyposażonej w niezerową jednoformę τ oraz niezdegenerowaną, dodatnio-określoną dwuliniową formę symetryczną g (iloczyn skalarny) zdefiniowaną na przestrzeni $E_0 = \ker \tau$. Punkty N nazywamy *zdarzeniami*. Dwa zdarzenia x, y są *jednoczesne* jeśli $\tau(x - y) = 0$. Forma τ służy do pomiaru różnicy czasu między zdarzeniami, zaś forma kwadratowa odpowiadająca g służy do pomiaru odległości między zdarzeniami jednoczesnymi.

Definicja 3 *Czasoprzestrzeń Minkowskiego* nazywamy przestrzeń afiniczną M modelowaną na czterowymiarowej przestrzeni wektorowej V wyposażonej w dwuliniową symetryczną formę o sygnaturze $(+, -, -, -)$. Elementy przestrzeni M nazywamy *zdarzeniami*.

Pojęcia fizyczne z mechaniki nierelatywistycznej oraz ze szczególnej teorii względności znalazły swoje matematyczne modele. A co z czasoprzestrzenią z ogólnej teorii względności? Nad tym musimy trochę popracować!

W dalszym ciągu wykładu zajmować się będziemy powierzchniami zanurzonymi w \mathbb{R}^n (afinicznym). Mówiąc nieprecyzyjnie, powierzchnia jest to taki podzbiór \mathbb{R}^n , który w otoczeniu każdego punktu wygląda jak kawałek \mathbb{R}^k (afinicznego) dla $k \leq n$. Oczywiście musimy doprecyzować co to znaczy "wygląda jak...". Skojarzenia możemy jednak czerpać z otoczenia. Powierzchnia ziemi (jeśli nie badać jej ze zbyt dużą dokładnością) wygląda w pobliżu nas na kawałek płaszczyzny. Dopiero kiedy patrzymy daleko widzimy różne dziwne zjawiska, np czubek masztu żaglowca wystający nad horyzont.

Definicja 4 Zbiór $S \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *powierzchnią wymiaru $k \leq n$* jeśli dla każdego punktu $x \in S$ istnieje otwarte otoczenie \mathcal{U} punktu x w \mathbb{R}^n , otwarte otoczenie \mathcal{O} punktu $0 \in \mathbb{R}^n$ oraz homeomorfizm $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$, $\Phi(x) = 0$, $\Phi(y) = (\varphi^1(y), \dots, \varphi^n(y))$ takie, że warunek $y \in S \cap \mathcal{U}$ jest równoważny warunkowi $\varphi^{k+1}(y) = \dots = \varphi^n(y) = 0$. S jest powierzchnią klasy C^r jeśli Φ jest dyfeomorfizmem klasy C^r .

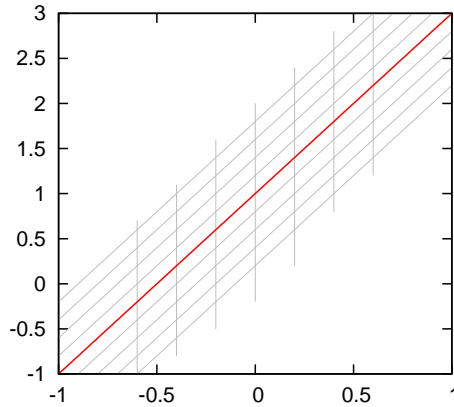
Innymi słowy w otoczeniu każdego punktu powierzchni istnieje układ współrzędnych taki, że przynależność punktu do powierzchni oznacza znikanie pewnej liczby ostatnich współrzędnych punktu. Przypominamy, że *dyfeomorfizm* klasy C^r jest to bijekcja różniczkowalna r razy w sposób ciągły i taka, że odwzorowanie odwrotne też jest różniczkowalne r razy w sposób ciągły. W dalszym ciągu zakładamy będziemy, że pracujemy z powierzchniami klasy C^∞ . Istnieje twierdzenie, które mówi, że jeśli na powierzchni istnieje struktura klasy C^1 to istnieje także C^r z $r = \infty$ włącznie. W powyższej definicji struktura wektorowa \mathbb{R}^n nie jest istotna. Struktura afiniczna jest w zupełności wystarczająca. Warunek $\Phi(x) = 0$ jest wybrany dla wygody. Moglibyśmy użyć dowolnego innego punktu w \mathbb{R}^n , tylko wtedy ciąg dalszy definicji miałby trudniejszą do zapamiętania postać.

Przykład 1 Najprostszym przykładem powierzchni jednowymiarowej w \mathbb{R}^2 jest prosta (Rys 1):

$$L = \{(x, y) : y = 2x + 1\}.$$

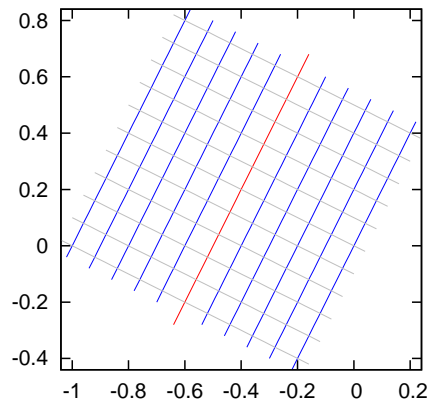
Żeby pokazać, że jest to powierzchnia jednowymiarowa musimy wprowadzić w otoczeniu każdego punktu układ współrzędnych taki, żeby prosta L zadana była warunkiem znikania drugiej współrzędnej. Ze względu na szczególnie nieskomplikowaną powierzchnię układ współrzędnych może być globalny, tzn. zdefiniowany na całym \mathbb{R}^2 a nie tylko w otoczeniu jednego punktu. Istnieje wiele odpowiednich układów współrzędnych. Siatka współrzędnych związana z jednym z nich zaznaczona jest na rysunku. Nowe współrzędne punktu $p = (x, y)$ oznaczymy (ξ, η) . Współrzędna ξ jest identyczna z x . Współrzędną η punktu p obliczymy znajdując punkt przecięcia prostej równoległej do L i przechodzącej przez p z osią pionową. Wartości przesuniemy tak, aby 0 odpowiadało właśnie prostej L . Takie określenie układu współrzędnych prowadzi do wzorów:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y - 2x - 1 \end{cases}$$



Rys. 1: "Najprostsza" powierzchnia - prosta.

Możliwy jest także inny układ współrzędnych. Jeśli zażądamy, aby druga współrzędna zmieniała się wzdłuż prostych prostopadłych do L otrzymamy Odpowiednie odwzorowanie $\Psi : (x, y) \mapsto$



Rys. 2: Inne współrzędne.

$(s(x, y), t(x, y))$ zapisuje się wzorami:

$$\begin{cases} s = 2y + x \\ t = y - 2x - 1 \end{cases}$$

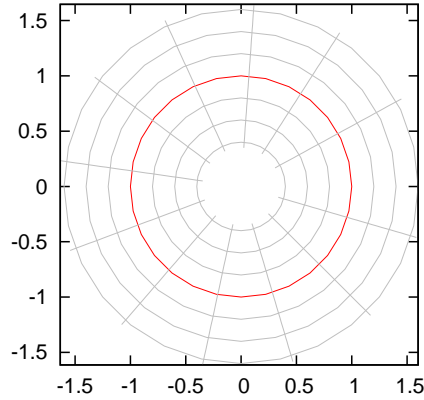


Przykład 2 Drugi standardowy przykład to okrąg:

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

W tym przypadku najłatwiej użyć biegunowego układu współrzędnych: Wzory są nam znane od dawna. Żeby zachować warunek „druga współrzędna równa zero” musimy zmienić kolejność współrzędnych i przesunąć wartości r . Wzory definiujące (r, φ) za pomocą (x, y) nie są wygodne w użyciu. Znacznie łatwiej zapisać odwzorowanie odwrotne:

$$\Phi_1(\varphi, r) = (x(\varphi, r), y(\varphi, r)), \quad \varphi \in]0, 2\pi[, \quad r \in]-1, 1[$$



Rys. 3: Okrąg

$$\begin{cases} x = (r + 1) \cos \varphi \\ y = (r + 1) \sin \varphi \end{cases}$$

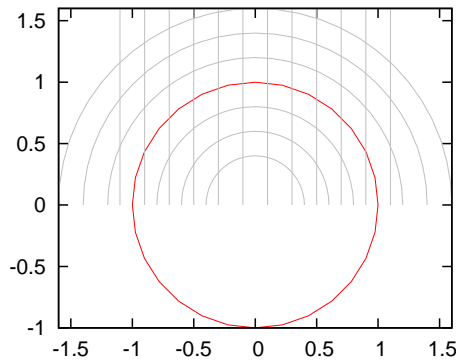
Zauważmy, że tym razem do zdefiniowania powierzchni nie wystarcza jeden układ współrzędnych. Ten przedstawiony powyżej jest dobry dla każdego punktu oprócz punktu $(1, 0)$ (we współrzędnych kartezjańskich). W otoczeniu $(1, 0)$ możemy wziąć odwzorowanie zadane tymi samymi wzorami, ale określone na innej dziedzinie:

$$\Phi_2(\varphi, r) = (x(\varphi, r), y(\varphi, r)), \quad \varphi \in]-\pi, \pi[, \quad r \in]-1, 1[.$$

Dla okręgu także można wybierać inne układy współrzędnych. Na przykład taki:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \end{cases}$$

określony w otoczeniu części okręgu położonego w górnej półpłaszczyźnie: Odwzorowanie od-



Rys. 4: Okrąg - inne współrzędne.

wrotne

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \sqrt{(\rho + 1)^2 - \xi^2} \end{cases}$$

określone jest w obszarze

$$\mathcal{V} = \{(\xi, \rho) : \rho > -1, -\rho - 1 < \xi < \rho + 1\}$$

Do opisanego całego okręgu potrzebujemy więcej niż dwóch tego rodzaju układów współrzędnych.

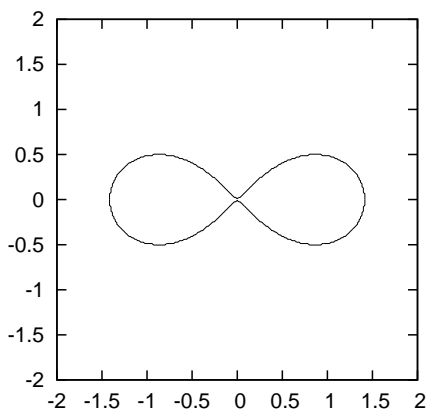
♣

Zobaczmy teraz co może powodować problemy:

Przykład 3 Powierzchnią nie jest tzw. *lemniskata Bernoulliego* zadana równaniem

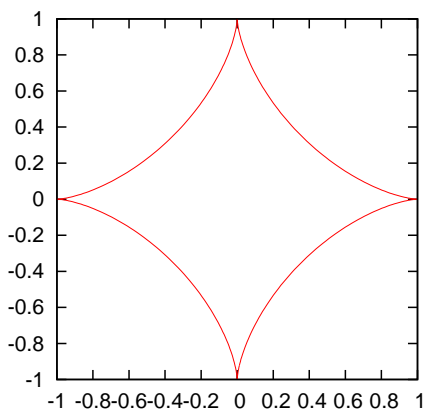
$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

Problemy są w otoczeniu punktu $(0, 0)$. Samoprzecięcia nie są dozwolone. ♣



Rys. 5: Lemniskata Bernoulliego

Przykład 4 Powierzchnią nie jest też. *hipocykloida*, czyli krzywa zakreślona przez punkt okręgu toczący się wewnątrz większego okręgu. Problemy są w otoczeniu punktów $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Nie są dozwolone także dzióbki: ♣

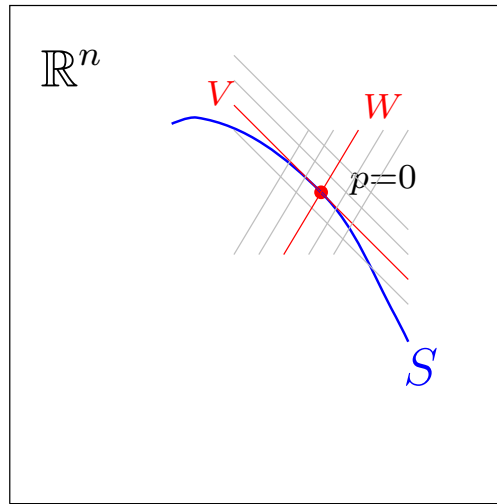


Rys. 6: Hipocykloida, stosunek promieni 1:4.

Zastanówmy się teraz jak można opisywać powierzchnię. W niemal wszystkich powyższych przykładach powierzchnia opisana była równaniem, czyli przedstawiona jako poziomica zerowa jakiejś funkcji. O tym jakie warunki powinna spełniać funkcja, żeby jej poziomica zerowa była powierzchnią mówi twierdzenie o maksymalnym rzędzie:

Twierdzenie 1 (O maksymalnym rzędzie) Niech $F : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym w sposób ciągły. Niech także $S = F^{-1}(0, \dots, 0)$ będzie zawarte w \mathcal{O} . Wówczas jeśli w każdym punkcie $p \in S$ pochodna $F'(p)$ ma maksymalny rząd (czyli równy m) to S jest powierzchnią w \mathbb{R}^n wymiaru $k = n - m$.

Dowód: Dla dowodu możemy przyjąć, że $p = 0 \in \mathbb{R}^n$ (bo i tak istotna jest afiniczna struktura \mathbb{R}^n , więc to gdzie „postawimy” zero żeby zidentyfikować afiniczne \mathbb{R}^n z wektorowym \mathbb{R}^n nie ma znaczenia). Oznaczmy teraz $V = \ker F'(0)$. Z założeń twierdzenia wynika, że $\dim V = n - m = k$. Wybierzmy także dowolną podprzestrzeń W dopełniającą do V , tzn $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Zauważmy,



Rys. 7: TFU

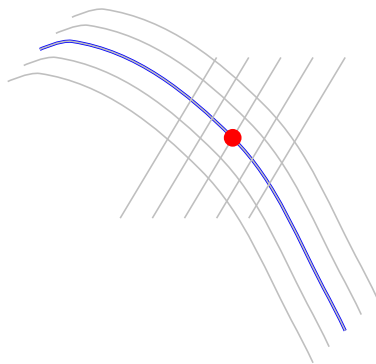
że F spełnia w $p = 0$ założenia TFU (Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej). Istotnie $F'(0)|_W$ jest odwracalne, co wynika z rachunku wymiarów. Korzystając z TFU znajdujemy więc otoczenie \mathcal{U} punktu zerowego w V oraz odwzorowanie $T : \mathcal{U} \rightarrow W$ klasy \mathcal{C}^1 takie, że $F(v, w) = 0$ jest równoważne $w = T(v)$. Kawałek powierzchni S przedstawiliśmy jako wykres odwzorowania T . Pozostaje teraz znaleźć współrzędne pojawiające się w definicji powierzchni. W tym celu wybierzmy w \mathbb{R}^n bazę $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ zgodną z rozkładem $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Niech ξ^i będą współrzędnymi związanymi z tą bazą. Szukany układ współrzędnych $\Phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ definiujemy następująco: Dla $i = 1 \dots k$

$$\varphi^i(x) = \xi^i(x),$$

dla $j = k + 1, \dots, n$

$$\varphi^j(x) = \xi^j(x) - \xi^j(T(P_W^V(x))),$$

gdzie P_W^V jest rzutem na V wzdłuż W . Gdy więc $x \in S$, czyli $x = T(P_W^V(x))$ to współrzędne φ^j znikają. Siatkę współrzędnych związaną z Φ można sobie wyobrazić mniej więcej tak:



Rys. 8: Współrzędne

Wniosek 1 Żeby pokazać, że dany zbiór jest (lokalnie) powierzchnią wystarczy pokazać, że jest (lokalnie) wykresem odwzorowania klasy C^1 . Często definiuje się powierzchnię w ten właśnie sposób nie używając pojęcia układu współrzędnych.

Używanie twierdzenia o stałym rzędzie jest bardzo wygodne, ponieważ daje odpowiedź natury globalnej. Powierzchnię można także zadawać poprzez parametryzację, tzn. obraz odwzorowania

$$\kappa : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

gdzie \mathcal{V} jest otwartym obszarem w \mathbb{R}^k . Okrąg o promieniu 1 można sparametryzować następująco

$$\kappa :]0, 2\pi[\ni \varphi \longmapsto (\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Obrazem tej parametryzacji jest okrąg bez jednego punktu. Zazwyczaj nie da się sparametryzować całej powierzchni za pomocą jednego odwzorowania. Parametryzacja musi także spełniać pewne warunki. Musi to być różniczkowalna iniekcja, której pochodna w każdym punkcie ma maksymalny rząd. Oto stosowne twierdzenie:

Twierdzenie 2 Niech $\kappa : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $k < n$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Wówczas jeśli $p_0 \in \mathcal{V}$ i $\kappa'(p_0)$ jest rzędu k to istnieje otoczenie \mathcal{O} punktu p_0 takie, że $\kappa(\mathcal{O})$ jest powierzchnią k -wymiarową w \mathbb{R}^n .

Dowód: Dla dowodu możemy założyć dla ułatwienia, że $p_0 = 0 \in \mathbb{R}^k$ oraz $\kappa(p_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Oznaczmy także $V = \text{im } \kappa'(0)$ oraz wybierzmy przestrzeń W dopełniającą V tak, że $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Z założeń twierdzenia wynika, że $\dim V = k$. Pokażemy, że w pewnym otoczeniu punktu 0 obraz odwzorowania κ jest wykresem odwzorowania. Niech K_1 i K_2 oznaczają odwzorowania

$$K_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow V, \quad K_1 = P_V^W \circ \kappa, \quad K_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow W, \quad K_2 = P_W^V \circ \kappa,$$

gdzie P_V^W i P_W^V są rzutami związanymi z rozkładem $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Odwzorowanie K_1 spełnia warunki twierdzenia o lokalnej odwracalności. Istotnie, skoro $\kappa(x) = K_1(x) + K_2(x)$ to $\kappa'(0) = K_1'(0) + K_2'(0)$. Jednak obrazem $\kappa'(0)$ jest V , obraz $K_1'(0)$ zawarty jest w V a obraz $K_2'(0)$ zawarty jest w W , zatem $K_1'(0) = 0$ oraz $\kappa'(0) = K_1'(0)$. wnioskujemy stąd, że $K_1'(0)$ jest maksymalnego rzędu. Zgodnie z twierdzeniem o lokalnej odwracalności istnieje otoczenie \mathcal{U}

punktu 0 w V takie, że $K_1^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest dobrze określone i klasy przynajmniej C^1 . Teraz możemy zapisać odwzorowanie T , którego wykresem jest (lokalnie) obraz κ :

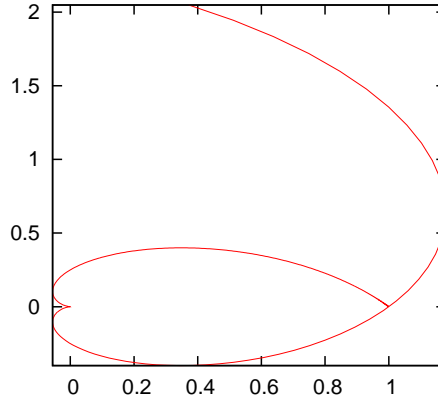
$$T : V \supset \mathcal{U} \mapsto W, \quad T = K_2 \circ K_1^{-1}.$$

Zgodnie z wnioskiem z poprzedniego twierdzenia wykres T jest powierzchnią wymiaru K . \square
 Twierdzenie dotyczące parametryzacji jest jedynie lokalne, dlatego oprócz rzędu odwzorowania należy sprawdzać przynajmniej injektywność. Poniższy przykład pokazuje jednak, że nawet globalna injektywność nie wystarcza:

Przykład 5 Rozważmy obraz następującego odwzorowania

$$\kappa : \mathbb{R} \ni t \mapsto \left((e^t - 1)^2 \cos(\pi e^t), (e^t - 1)^2 \sin(\pi e^t) \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Interesuje nas, czy obraz ten jest jednowymiarową powierzchnią w \mathbb{R}^2 . Bardzo przydatny będzie rysunek. Patrząc na rysunek (Rys 9) natychmiast identyfikujemy dwa punkty podejrzane o

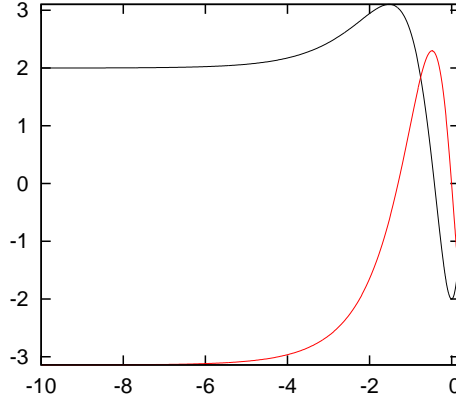


Rys. 9: Czy to jest powierzchnia?

powodowanie kłopotów: dla $t = 0$ mamy punkt $(0, 0)$ w którym wydaje się być „dzióbek”, ponadto wygląda na to, że w punkcie $(1, 0)$ jest samoprzecięcie, a przynajmniej rozgałęzienie. Zapomnijmy teraz o obrazku i spróbujmy zidentyfikować kłopoty na poziomie rachunkowym. Wyznaczamy κ' :

$$\begin{aligned} \kappa'(t) &= \begin{bmatrix} 2(e^t - 1)e^t \cos(\pi e^t) - (e^t - 1)^2 \sin(\pi e^t)\pi e^t \\ 2(e^t - 1)e^t \sin(\pi e^t) + (e^t - 1)^2 \cos(\pi e^t)\pi e^t \end{bmatrix} = \\ &= (e^t - 1)e^t \begin{bmatrix} 2 \cos(\pi e^t) - \pi(e^t - 1) \sin(\pi e^t) \\ 2 \sin(\pi e^t) + \pi(e^t - 1) \cos(\pi e^t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rzut oka na wykresy (Rys 7) funkcji $t \mapsto 2 \cos(\pi e^t) - \pi(e^t - 1) \sin(\pi e^t)$ (na czarno) i $t \mapsto 2 \sin(\pi e^t) + \pi(e^t - 1) \cos(\pi e^t)$ (na czerwono) pokazuje, że funkcje te nie zerują się jednocześnie, zatem rząd pochodnej jest mniejszy od 1 jedynie w przypadku, kiedy $e^t = 1$, tzn $t = 0$. W otoczeniu punktu $(0, 0)$ będącego obrazem $t = 0$ nie możemy korzystać z twierdzenia (2). Istotnie mamy wtedy osobliwość typu „dzióbek”. W okolicach $t = 0$ pierwsza współrzędna



Rys. 10: Pomocne wykresy.

krzywej zachowuje się jak $-t^2$ zaś druga jak $-\pi t^3$. Zależność między pierwszą współrzędną (x) a drugą (y) to mniej więcej $x \sim y^{2/3}$. Mamy więc dla $y \neq 0$

$$\frac{dx}{dy} \sim y^{-\frac{1}{3}}.$$

Dla $y = 0$ pochodna nie istnieje, granice pochodnej z obu stron są nieskończone i mają różne znaki. Wygląda na to, że poza punktem $t = 0$ możemy korzystać z twierdzenia (2), tzn. dla każdego $t \neq 0$ istnieje takie $\epsilon > 0$, że obraz odcinka $]t - \epsilon, t + \epsilon[$ względem κ jest jednowymiarową powierzchnią w \mathbb{R}^2 . Co zatem z punktem $(1, 0)$?

Sprawdźmy injektywność odwzorowania κ . Czy istnieją liczby t i s takie, że $\kappa(t) = \kappa(s)$? Wspomagając się nieco znajomością biegunowego układu współrzędnych stwierdzamy, że przede wszystkim $\pi e^t = \pi e^s + 2\pi$, tzn. $e^t = e^s + 2$. Potrzeba ponadto także aby $(e^t - 1)^2 = (e^s - 1)^2$. Korzystając z pierwszego warunku otrzymujemy, że

$$e^t + 1 = e^t - 1 \quad \text{lub} \quad e^t + 1 = -e^t + 1$$

Pierwsze równanie jest w sposób oczywisty sprzeczne, zaś drugie oznacza, że $e^t = 0$, co też nie ma rozwiązań. Myśląc w języku współrzędnych biegunowych pomijamy sytuację $r = 0$, φ dowolne, jednak tutaj $r = 0$ oznacza $e^t = 1$, czyli $t = 0$ - jedno rozwiązanie. Stwierdzamy więc, że odwzorowanie κ jest injektywne. Nadal więc nie znaleźliśmy żadnych kłopotów w punkcie $(1, 0)$, które widać na rysunku. Zauważymy je dopiero, gdy zwrócimy uwagę na fakt, że co prawda równanie $e^t = 0$ nie ma rozwiązań w \mathbb{R} , to spełnia je $-\infty$. W granicy $t \rightarrow -\infty$ nasza krzywa $t \rightarrow \kappa(t)$ zmierza więc do punktu, który już raz minęła przy $t = \log 2$, czyli właśnie do punktu $(1, 0)$. Morał z tego przykładu jest taki: nie wystarczy sprawdzić rzędu odwzorowania i jego injektywności, żeby mieć pewność, że obraz tego odwzorowania jest powierzchnią! ♣

W dalszym ciągu będziemy chcieli uprawiać analizę na powierzchniach – nauczyć się różniczkować i całkować odpowiednie obiekty zdefiniowane na powierzchni. W tym celu musimy w jakiś sposób identyfikować punkty na powierzchni. Sposobu identyfikacji punktów dostarcza sama definicja 4 powierzchni zanurzonej. Niech Φ będzie używanym w definicji układem współrzędnych. Znikanie ostatnich $n - k$ współrzędnych definiuje powierzchnię. Pierwsze k współrzędnych może być za to użyte do identyfikacji każdego z punktów zbioru $S \cap \mathcal{U}$. Bardziej ogólnie:

Definicja 5 Niech $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$ będzie jak w definicji 4. Niech także $\mathcal{V} \subset S \cap \mathcal{U}$ będzie zbiorem otwartym na powierzchni S . Odwzorowanie $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ nazywamy *mapą* lub *układem współrzędnych* na powierzchni S jeśli Ψ jest gładkim dyfeomorfizmem \mathcal{V} i $\Psi(\mathcal{V})$. Precyzyjniej odwzorowanie $pr \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$ gdzie $pr : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest projekcją na pierwsze k współrzędnych, jest gładkim dyfeomorfizmem $\Psi(\mathcal{V})$ i $pr(\Phi(\mathcal{V}))$. Funkcje $y^i : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1 \dots k$ składające się na Ψ nazywamy *współrzędnymi* na S . Odwzorowanie odwrotne do Ψ nazywamy *parametryzacją*.

Przykład 6 Skonstruujemy współrzędne stereograficzne na sferze dwuwymiarowej

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Niech \mathcal{O}_+ oznacza $S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ zaś \mathcal{O}_- oznacza $S \setminus \{(0, 0, -1)\}$. Odwzorowania

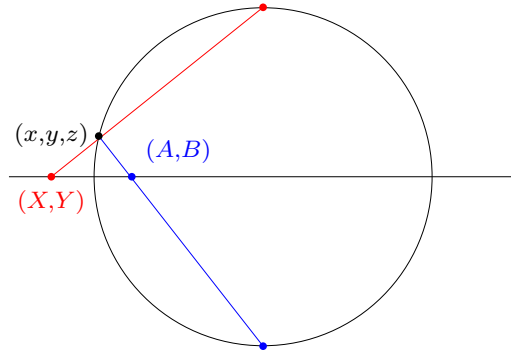
$$\Psi_+ : \mathcal{O}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (X, Y), \quad X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z} \quad (1)$$

$$\Psi_- : \mathcal{O}_- \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (A, B), \quad A = \frac{x}{1+z}, \quad B = \frac{y}{1+z} \quad (2)$$

są mapami na S . Zauważmy, że na zbiorze $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, gdzie określone są oba układy współrzędnych odwzorowanie zamiany zmiennych

$$\mathbb{R}^2 \ni (A, B) \longmapsto (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \quad X = \frac{A}{A^2 + B^2}, \quad Y = \frac{B}{A^2 + B^2}$$

jest odwzorowaniem gładkim. ♣



Rys. 11: Współrzędne stereograficzne.

Na sferze używamy też często współrzędnych pochodzących ze sferycznego układu współrzędnych. Łatwiej je zapisać w postaci parametryzacji

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \cos \vartheta \end{cases}, \quad \varphi \in]0, 2\pi[, \vartheta \in]0, \pi[.$$

2 Przestrzeń styczna i kostyczna

Niech A będzie przestrzenią afiniczną modelowaną na przestrzeni wektorowej V . Używać będziemy algebry $C^\infty(A)$ funkcji gładkich na A oraz zbioru gładkich krzywych w A , czyli gładkich odwzorowań $I \rightarrow A$, gdzie I jest odcinkiem otwartym. Wygodnie jest założyć, że odcinek ten zawiera 0. Pochodna krzywej γ w punkcie $t = 0$ jest odwzorowaniem liniowym z \mathbb{R} do V . W poniższej definicji występuje $\gamma'(0)1$, czyli wartość odwzorowania $\gamma'(0)$ na $1 \in \mathbb{R}$:

Definicja 6 *Wektorem stycznym* do krzywej γ w punkcie $t = 0$ nazywamy parę $(\gamma(0), \gamma'(0)1) \in A \times V$. Punkt $\gamma(0) \in A$ nazywamy punktem zaczepienia wektora $(\gamma(0), \gamma'(0)1)$. Zbiór wektorów stycznych do wszystkich krzywych w A oznaczamy $\mathbb{T}A$ i nazywamy przestrzenią styczna do A . Zbiór wektorów zaczepionych w $a \in A$ oznaczamy \mathbb{T}_aA

Jest rzeczą oczywistą, że $\mathbb{T}A = A \times V$, gdyż dla dowolnej pary (a, v) znaleźć można krzywą dla której ta właśnie para jest wektorem stycznym, np. $t \mapsto a + tv$. Podobnie oczywiste jest, że $\mathbb{T}_aA = V$. Przestrzeń wektorów stycznych do A w punkcie a ma więc strukturę przestrzeni wektorowej. Na razie nie będziemy bliżej zastanawiać się nad tą strukturą (wektorową). Proszę jednak zapamiętać tę obserwację. W tym momencie wydaje się ona oczywista (skoro $\mathbb{T}_aA = V$, a V jest przestrzenią wektorową, to \mathbb{T}_aA też jest przestrzenią wektorową), ale już wkrótce sytuacja się nieco skomplikuje.

Niech $\Phi : A \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \mapsto (\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a))$ będzie układem współrzędnych w A . W szczególności oznacza to, że pochodne $\Phi'(a)$ oraz $(\Phi^{-1})'(\Phi(a))$ są rzędu n dla $a \in U$. Ustalmy punkt $a \in U$. Niech γ_i oznacza krzywą

$$t \mapsto \gamma_i(t) = \Phi^{-1}(\varphi^1(a), \dots, \varphi^i(a) + t, \dots, \varphi^n(a)).$$

Wektory styczne do krzywych γ_i w $t = 0$ rozpinają przestrzeń \mathbb{T}_aA . Zauważmy, że wektor styczny do krzywej γ_i jest obrazem względem $(\Phi^{-1})'(\Phi(a))$ i -tego wektora bazy standardowej w \mathbb{R}^n . Maksymalny rząd pochodnej Φ^{-1} gwarantuje, że wektory styczne do krzywych γ_i są liniowo niezależne, stanowią więc bazę \mathbb{T}_aA . W geometrii różniczkowej mówimy, że jest to baza pochodząca od układu współrzędnych. Wprowadzamy też specjalne oznaczenia: Wektor styczny do krzywej γ_i oznaczamy

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \quad \text{lub} \quad \partial_i,$$

jeśli odwoływanie się do konkretnej nazwy współrzędnych φ^i nie jest konieczne. Wektor (a, v) możemy teraz zapisać przy pomocy współrzędnych $(\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a), \dot{\varphi}^1(v), \dots, \dot{\varphi}^n(v))$ jeśli

$$v = \dot{\varphi}^1(v)\partial_1 + \dots + \dot{\varphi}^n(v)\partial_n.$$

Odwzorowanie

$$U \times V \ni (a, v) \mapsto (\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a), \dot{\varphi}^1(v), \dots, \dot{\varphi}^n(v)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

jest układem współrzędnych w otwartym podzbiórze przestrzeni stycznej. Oznaczanie wektorów stycznych symbolem związanym z różniczkowaniem ma głęboki sens, o którym za chwilę.

Definicja 7 Przestrzenią styczną do powierzchni $S \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór wektorów stycznych do krzywych, których obrazy leżą w S . Przestrzeń styczną do S oznaczmy $\mathbb{T}S$

Przestrzeń styczna TS jest zgodnie z definicją podzbiorem przestrzeni stycznej $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Każdy wektor styczny ma dobrze zdefiniowany punkt zaczepienia. Formalnie rzecz biorąc mamy więc odwzorowanie $\tau_S : TS \rightarrow S$. Możemy wyróżnić także $T_x S = \tau_S^{-1}(x)$, czyli zbiór wektorów stycznych zaczepionych w punkcie x . $T_x S$ jest podzbiorem w $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, jednak w różnych punktach podzbiory te mogą być różne. Nie mamy więc w TS struktury iloczynu kartezyjańskiego, tak jak to było w TA . Okazuje się jednak, że

Fakt 1 *Podzbiór $T_x S$ jest podprzestrzenią wektorową w $T_x \mathbb{R}^n$ wymiaru równego wymiarowi powierzchni.*

Dowód: Na pierwszy rzut oka nie widać powodu, aby przestrzeń styczna do powierzchni w punkcie była podprzestrzenią wektorową w przestrzeni stycznej do \mathbb{R}^n . Podobnie jak nie bardzo wiadomo skąd się w ogóle bierze struktura wektorowa w $T_a A$. Żeby pokazać, że TS jest podprzestrzenią wektorową musimy sięgnąć aż do współrzędnych na S . W świecie geometrii różniczkowej oznacza to użycie brutalnej siły! Niech więc x będzie punktem powierzchni S i niech Φ będzie układem współrzędnych w otoczeniu x takim jak w definicji powierzchni. Oznacza to, że współrzędne $\varphi^{k+1} \dots \varphi^n$ znikają dla punktów na powierzchni, ponadto $\Phi(x) = 0$. Krzywa γ leżąca w S i przechodząca dla $t = 0$ przez x ma więc opis we współrzędnych $t \mapsto (\varphi^1(\gamma(t)), \varphi^2(\gamma(t)), \dots, \varphi^k(\gamma(t)), 0, \dots, 0)$.

Niech teraz (x, v) i (x, w) będą elementami $T_x S$. Czy $(x, v+w)$ oraz $(x, \lambda v)$ też są elementami $T_x S$? Zaproponujemy krzywe, których obrazy leżą w S i których wektory styczne to $(x, v+w)$ oraz $(x, \lambda v)$ korzystając z istnienia krzywych dla (x, v) i (x, w) . Niech więc $\gamma_v : I \rightarrow S \subset A$ oraz $\gamma_w : I \rightarrow S \subset A$ będą odpowiednimi krzywymi. Łatwo jest zdefiniować krzywą reprezentującą $(x, \lambda v)$:

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$$

dla odpowiednio małych t , aby argument krzywej γ_v mieścił się w dziedzinie. Wtedy istotnie

$$\gamma'_{\lambda v}(0)1 = \lambda \gamma'_v(0)1 = \lambda v.$$

Trudniej jest dla $(x, v+w)$. Musimy posłużyć się układem współrzędnych:

$$\gamma_{v+w}(t) = \Phi^{-1}(\Phi(\gamma_v(t)) + \Phi(\gamma_w(t))).$$

Idea jest następująca: nie możemy dodawać krzywych w A (nie ma dodawania punktów), nawet jeśli $A = \mathbb{R}^n$ i użyjemy struktury wektorowej do dodania $\gamma_v(t) + \gamma_w(t)$ to powstała w ten sposób krzywa zapewne nie będzie leżała w S a prawdopodobnie także nie będzie przechodziła przez x , chyba, że $x = 0$. Obrazy krzywych względem Φ przechodzą przez 0 (suma więc też) oraz leżą w podprzestrzeni wektorowej $\varphi^{k+1} = \dots = \varphi^n = 0$ (i suma też). Złożenie z Φ^{-1} przeprowadzi więc sumę w pewną krzywą w S przechodzącą przez x . Badamy wektor styczny:

$$\begin{aligned} \gamma'_{v+w}(0)1 &= (\Phi^{-1})'(0) [\Phi'(x)\gamma'_v(0)1 + \Phi'(x)\gamma'_w(0)1] = \\ &= (\Phi^{-1})'(0)\Phi'(x)\gamma'_v(0)1 + (\Phi^{-1})'(0)\Phi'(x)\gamma'_w(0)1 = \gamma'_v(0)1 + \gamma'_w(0)1 = v + w. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że $T_x S$ jest podprzestrzenią wektorową w V . Pozostaje kwestia wymiaru. Pokażemy, że $T_x S$ jest rozpięta przez ∂_i dla $i = 1 \dots k$. Jeśli krzywa γ leży w S , to krzywa $\Phi \circ \gamma$ leży w podprzestrzeni $\varphi^{k+1} = \dots = \varphi^n = 0$ w \mathbb{R}^n , zatem wektor styczny w

$t = 0$ da się zapisać jako kombinacja wektorów e_1, \dots, e_k z bazy kanonicznej \mathbb{R}^k . Współczynniki oznaczmy przez $\dot{\varphi}^i$. Mamy więc

$$v = \gamma'(0)1 = (\Phi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma)'(0)1 = (\Phi^{-1})'(0)(\dot{\varphi}^1 e_1 + \dots + \dot{\varphi}^k e_k) = \dot{\varphi}^1 \partial_1 + \dots + \dot{\varphi}^k \partial_k$$

Wymiar $T_x S$ jest conajwyżej k . Wiemy jednak także, że $(\Phi - 1)'(0)$ jest rzędu n , więc wektory ∂_i są liniowo niezależne. \square

Pora na podsumowanie: Zdefiniowaliśmy przestrzeń styczną do przestrzeni afinicznej A jako zbiór wektorów stycznych do krzywych. Okazało się, że $TA = A \times V$. Zdefiniowaliśmy także przestrzeń styczną TS do powierzchni S jako zbiór wektorów stycznych do krzywych, których obrazy leżą w S . Okazało się, że w ustalonym punkcie $T_x S$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni wektorowej $T_x A = V$. Wprowadziliśmy także bazę ∂_i w $T_x A$ związaną z danym układem współrzędnych. Jeśli ten układ współrzędnych „pasuje” do powierzchni S , tzn. jest taki jak definicji powierzchni, to wektory ∂_i dla $i = 1 \dots k$ rozpinają $T_x S$. Spójrzmy teraz szerzej: założmy, że mamy parametryzację κ pewnego zbioru otwartego \mathcal{O} w S . Wówczas krzywe $t \mapsto \kappa(x^1, \dots, x^i + t, \dots, x^k)$ leżą w S i wektory styczne do tych krzywych rozpinają $T_x S$. Wektory te oznaczać będziemy, jak poprzednio, ∂_i lub $\frac{\partial}{\partial x^i}$, mimo, że nie mamy wyróżnionego uzupełnienia bazy $T_x S$ do bazy V . Do zdefiniowania bazy w przestrzeni stycznej wystarczy parametryzacja lub układ współrzędnych na samym S , nie koniecznie w otoczeniu.

Zauważmy, że przestrzeń styczna TS do powierzchni S sama też jest powierzchnią zanurzoną w $A \times V$. Odpowiedni układ współrzędnych można skonstruować korzystając z układu współrzędnych Φ w otoczeniu \mathcal{U} punktu $x \in S$. Nowy układ współrzędnych będzie określony w $\mathcal{U} \times V$

$$\mathcal{U} \times V \ni (y, w) \mapsto (\Phi(y), \Phi'(y)w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Wektor (y, w) należy do TS jeśli znikają współrzędne $(\varphi^{k+1}(y), \dots, \varphi^n(y))$ oraz gdy $\Phi'(y)w = 0$. Pojęcie wektora stycznego jest często używane w teoriach fizycznych. Wektorem stycznym jest prędkość i przesunięcie wirtualne. Wybierając jeden wektor styczny w każdym punkcie definiujemy *pole wektorowe* na powierzchni S . Inaczej mówiąc

Definicja 8 *Polem wektorowym* na powierzchni S nazywamy odwzorowanie $X : S \rightarrow TS$ takie, że $\tau_S \circ X = id_S$.

Mając bazę związaną z układem współrzędnych możemy zapisać pole za pomocą współczynników rozkładu wektorów będących wartościami pola w bazie:

$$X(x) = X^1(x)\partial_1 + X^2(x)\partial_2 + \dots + X^k(x)\partial_k.$$

Mówimy, że pole jest różniczkowalne (gładkie), jeśli funkcje X^i są różniczkowalne (gładkie). Używając pojęcia pola wektorowego mówi się w fizyce o polu elektrostatycznym, polu indukcji magnetycznej, polu grawitacyjnym itd. W mojej opinii inne obiekty geometryczne nadają się do tego nieco lepiej.

Przejdziemy teraz do definicji przestrzeni kostycznej. Zaczniemy tak jak poprzednio od całej przestrzeni afinicznej A . Jeśli f jest funkcją na A , to jej pochodna w ustalonym punkcie $f'(a)$ jest elementem przestrzeni $L(V, \mathbb{R})$ – odwzorowań liniowych na V o wartościach rzeczywistych. Na wykładzie z algebry liniowej ta przestrzeń nazywała się *przestrzenią sprzężoną* lub *dualną* i była oznaczana V^* . Na potrzeby geometrii różniczkowej pochodną $f'(a)$ nazywać będziemy

różniczką funkcji f w punkcie a i oznaczać $df(a)$. Jest jasne, że zbiór wszystkich różniczek w ustalonym punkcie a to V^* . W kontekście geometrii różniczkowej będziemy oznaczać tę przestrzeń \mathbb{T}_a^*A , natomiast zbiór wszystkich różniczek we wszystkich punktach $\mathbb{T}A$. Mamy więc $\mathbb{T}^*A = A \times V^*$, $\mathbb{T}_a^*A = V^*$. Przestrzeń kostyczna w punkcie jest dualna do przestrzeni stycznej w punkcie. Układ współrzędnych Φ umożliwia skonstruowanie bazy przestrzeni kostycznej. Łatwo sprawdzić, że układ różniczek $(d\varphi^1(a), \dots, d\varphi^n(a))$ jest liniowo niezależny i rozpina przestrzeń kostyczną w punkcie. Widać także, że baza złożona z różniczek współrzędnych jest bazą dualną względem bazy $(\partial_1, \dots, \partial_n)$, tzn.

$$\langle d\varphi^i(a), \partial_j \rangle = \delta_j^i.$$

Nietrudno także zgadnąć jak znaleźć współrzędne $df(a)$ w bazie $(d\varphi^i)$:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial \varphi^1}(a)d\varphi^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}(a)d\varphi^n,$$

gdzie $\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(a)$ oznacza pochodną cząstkową złożenia $f \circ \Phi^{-1}$ względem i -tej współrzędnej obliczoną w punkcie $\Phi(a)$.

A co z przestrzenią kostyczną do powierzchni? Niech $x \in S$ będzie ustalonym punktem powierzchni S zanurzonej w A . Co to jest różniczka funkcji f określonej jedynie na S powiedzieć nie potrafimy. Rozumowanie musi więc iść inną drogą.

Definicja 9 *Przestrzenią kostyczną do powierzchni S w punkcie x nazywamy przestrzeń dualną do \mathbb{T}_xS i oznaczamy \mathbb{T}_x^*S . Elementy przestrzeni kostycznej w punkcie x nazywamy kowektorami zaczepionymi w x . Zbiór wszystkich kowektorów zaczepionych we wszystkich punktach S nazywamy przestrzenią (wiązką) kostyczną do S i oznaczamy \mathbb{T}^*S .*

Posługując się wiedzą z zakresu algebry liniowej stwierdzamy, że przestrzeń \mathbb{T}_x^*S jest kanonicznie izomorficzna z przestrzenią ilorazową $V^*/(\mathbb{T}_xS)^0$. Na wszelki wypadek warto przypomnieć, że skoro \mathbb{T}_xS jest podprzestrzenią wektorową w V , to możemy rozważać jej anihilator $(\mathbb{T}_xS)^0$, czyli podprzestrzeń wektorową w V^* zawierającą wszystkie kowektory zerujące się na \mathbb{T}_xS . Dzielenie przez tę podprzestrzeń polega na utożsamieniu ze sobą kowektorów, które różnią się o kowektor znikający na \mathbb{T}_xS . Innymi słowy kowektor na S to klasa równoważności kowektorów na A . A gdzie tu różniczki funkcji na S ?

Niech $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją na S . W otoczeniu $\mathcal{O} \subset A$ punktu x można tę funkcję rozszerzyć do funkcji \tilde{f} . Można to zrobić na przykład przy pomocy układu współrzędnych:

$$\tilde{f}(y) = f(\Phi^{-1}(\varphi^1(y), \dots, \varphi^k(y), 0, \dots, 0)).$$

Funkcja \tilde{f} zgadza się z f na $\mathcal{O} \cap S$. Tego rodzaju rozszerzeń jest bardzo wiele i żadne z nich nie jest wyróżnione. Rozszerzenie jest funkcją określoną na otwartym zbiorze w A , zatem można wyznaczyć różniczkę tego rozszerzenia w punkcie x . Oczywiście różne rozszerzenia mogą mieć różne różniczki, jednak będą one należały do tej samej klasy równoważności względem dzielenia przez $(\mathbb{T}_xS)^0$. Istotnie, niech (x, v) będzie wektorem stycznym do krzywej γ leżącej w S . Niech także \tilde{f} i f będą rozszerzeniami funkcji f , wtedy

$$\langle d\tilde{f}(x) - df(x), v \rangle = \langle d\tilde{f}(x), v \rangle - \langle df(x), v \rangle = (\tilde{f} \circ \gamma)'(0) - (f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \gamma)'(0) - (f \circ \gamma)'(0) = 0.$$

W powyższym rachunku wykorzystaliśmy fakt, że $\tilde{f} \circ \gamma = f \circ \gamma$ jeśli γ ma obraz w S .

Definicja 10 *Różniczką funkcji* $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie x nazywamy klasę równoważności dowolnego rozszerzenia funkcji f do funkcji gładkiej na otoczeniu punktu x w A

Przykład 7 Rozważmy powierzchnię $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Niech $p \in S^1$ będzie takim punktem, którego współrzędne kartezjańskie to $x(p) = \cos \alpha$, $y(p) = \sin \alpha$. W naturalnej parametryzacji kątem biegunowym φ punkt ten definiowany jest więc jako $\varphi(p) = \alpha$. Współrzędne kartezjańskie (x, y) stanowią układ współrzędnych na $A = \mathbb{R}^2$, podczas gdy współrzędna φ jest określona na S^1 . W przestrzeni $T_p A$ mamy więc bazę (∂_x, ∂_y) a w $T_p^* A$ bazę $(dx(p), dy(p))$. Co to jest $d\varphi(p)$? Najpierw przestrzeń styczna

$$T_p S^1 = \{\lambda \partial_\varphi, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \partial_\varphi = -\sin \alpha \partial_x + \cos \alpha \partial_y.$$

Anihilator $(T_p S^1)^0$ zawiera kowektory $\lambda dx(p) + \mu dy(p)$ spełniające warunek

$$\langle \lambda dx(p) + \mu dy(p), -\sin \alpha \partial_x + \cos \alpha \partial_y \rangle = 0,$$

czyli kowektory proporcjonalne do

$$\cos \alpha dx(p) + \sin \alpha dy(p).$$

Kowektor $d\varphi$ na S^1 jest klasą równoważności kowektorów na A względem dzielenia przez $(T_p S^1)^0$. Wiadomo ponadto, że jeśli kowektor należy do tej klasy, to obliczony na ∂_φ powinien dać 1, czyli

$$\langle \lambda dx(p) + \mu dy(p), -\sin \alpha \partial_x + \cos \alpha \partial_y \rangle = 1.$$

Tym razem $\lambda = -\sin(\alpha)$, $\mu = \cos \alpha$, zatem

$$d\varphi = \cos \alpha dy(p) - \sin \alpha dx(p) + s[\cos \alpha dx(p) + \sin \alpha dy(p)], \quad s \in \mathbb{R}.$$

Używając wyłącznie współrzędnych kartezjańskich po prawej stronie napiszemy, że

$$d\varphi = x(p)dy(p) - y(p)dx(p) + s[x(p)dx(p) + y(p)dy(p)], \quad s \in \mathbb{R}.$$



W dalszym ciągu w oznaczeniach różniczek zazwyczaj będziemy pomijać odniesienie do konkretnego punktu, pamiętając jednak, że każdy kowektor ma swój punkt zaczepienia. Formalnie mówiąc istnieje odwzorowanie $\pi_S : T^*S \rightarrow S$ przypisujące kowektorowi jego punkt zaczepienia. W teoriach fizycznych kowektory pojawiają się rzadziej niż wektory (a powinny częściej). Kowektorem jest pęd punktu materialnego i siła działająca na punkt materialny.

Mowiliśmy już o polach wektorowych, czyli odwzorowaniach $S \rightarrow TS$. Podobnie jest dla przestrzeni kostycznej

Definicja 11 Odwzorowanie $\alpha : S \rightarrow T^*S$ takie, że $\pi_S \circ \alpha = id_S$ nazywamy polem kowektorowym lub jednoformą na S

Przykładem jednoformy jest różniczką funkcji $x \mapsto df(x)$. Jednoformy można także zapisywać w bazie związanej z układem współrzędnych

$$\alpha(x) = \alpha_1(x)d\varphi^1 + \alpha_2(x)d\varphi^2 + \cdots + \alpha_k(x)d\varphi^k.$$

Mówimy, że forma jest różniczkowalna (gładka) jeśli funkcje α_i są różniczkowalne (gładkie),

Zrobimy teraz przerywnik algebraiczny: Niech (V, g) będzie przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny g . Iloczyn skalarny jest to forma dwuliniowa symetryczna, niezdegenerowana i dodatnio określona, tzn. odwzorowanie

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

liniowe ze względu na każdy argument (dwuliniowość), takie że $g(v, w) = g(w, v)$ (symetria), spełniające warunki $g(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$ (niezdegenerowanie) oraz $g(v, v) \geq 0$ (dodatnia określoność). Warunek niezdegenerowania można wyrazić jeszcze inaczej. Każda forma dwuliniowa zadaje odwzorowanie

$$G : V \rightarrow V^*, \quad G(v) = g(v, \cdot).$$

Forma jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy G jest izomorfizmem liniowym. Iloczyn skalarny pozwala utożsamić przestrzeń wektorową z jej przestrzenią dualną. Mając bazę (e_i) w przestrzeni wektorowej możemy znaleźć macierz formy dwuliniowej

$$G_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Macierz formy symetrycznej jest symetryczna względem głównej przekątnej, macierz formy niezdegenerowanej jest niezdegenerowana a macierz formy symetrycznej dodatnio określonej jest diagonalizowalna i ma dodatnie wartości własne (twierdzenie spektralne). Ta sama macierz G_{ij} jest macierzą odwzorowania G w bazach (e_i) i dualnej (ε^j) , tzn. $[G_{ij}] = [G]_e^\varepsilon$.

Założmy teraz, że przestrzeń modelowa V dla przestrzeni afinicznej A jest wyposażona w iloczyn skalarny. Pozwala nam to liczyć długości wektorów

$$\|v\| = \sqrt{g(v, v)},$$

mierzyć odległości między punktami przestrzeni afinicznej:

$$d(a_1, a_2) = \|a_2 - a_1\|.$$

oraz liczyć długości krzywych:

$$\ell(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Odpowiednie odwzorowanie

$$\mathbb{T}A \ni (a, v) \longmapsto (a, G(v)) \in \mathbb{T}^*A,$$

które dla ułatwienia będziemy oznaczać także literą G , jest izomorfizmem wiązki stycznej z wiązką kostyczną.

Iloczyn skalarny możemy mieć także na powierzchni, w tym sensie, że przestrzeń styczna w każdym punkcie $x \in S$ może być wyposażona w iloczyn skalarny g_x . Oczywiście nie możemy wybrać g_x całkiem dowolnie. Mając układ współrzędnych w zbiorze \mathcal{U} otwartym w S i bazę (∂_i) w każdej z przestrzeni stycznych możemy zapisać macierz g_x w bazie. W różnych punktach macierze te mogą być różne. Każdy z wyrazów macierzowych jest teraz funkcją współrzędnych punktu na S . Będziemy wymagać, żeby wyrazy macierzowe zależały od współrzędnych punktu w sposób gładki. Mówimy wtedy, że S jest wyposażona w gładki iloczyn skalarny lub gładką metrykę. Często będziemy spotykać się z sytuacją, kiedy iloczyn skalarny na powierzchni S pochodzi od iloczynu skalarnego na przestrzeni afinicznej w której S jest zanurzony.

Przykład 8 Niech S^2 będzie dwuwymiarową sferą zanurzoną w \mathbb{R}^3 . Przestrzeń styczna $T_p\mathbb{R}^3$ w każdym punkcie $p = (x, y, z)$ wyposażona jest w iloczyn skalarny, którego macierz w bazie $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ jest macierzą jednostkową. Sprawdźmy jak wygląda iloczyn skalarny na sferze wyrażony we współrzędnych sferycznych. Parametryzacja sfery ma postać

$$\begin{aligned}x(\vartheta, \varphi) &= \cos \varphi \sin \vartheta, \\y(\vartheta, \varphi) &= \sin \varphi \sin \vartheta, \\z(\vartheta, \varphi) &= \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Wobec tego wektory styczne w punkcie (ϑ, φ) wyrażają się w bazie $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ wzorami

$$\begin{aligned}\partial_\varphi &= -\sin \varphi \sin \vartheta \partial_x + \cos \varphi \sin \vartheta \partial_y, \\ \partial_\vartheta &= \cos \varphi \cos \vartheta \partial_x + \sin \varphi \cos \vartheta \partial_y - \sin \vartheta \partial_z\end{aligned}$$

Baza $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ jest ortonormalna względem iloczynu skalarnego, zatem

$$\begin{aligned}g(\partial_\varphi, \partial_\varphi) &= \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta \\ g(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta) &= \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1 \\ g(\partial_\vartheta, \partial_\varphi) &= -\sin \varphi \sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta = 0\end{aligned}$$

Macierz iloczynu skalarnego w bazie $(\partial_\varphi, \partial_\vartheta)$ ma postać

$$\begin{bmatrix} \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jest to jednocześnie macierz odwzorowania z $T_{(\varphi, \vartheta)}S^2$ do $T_{(\varphi, \vartheta)}^*S^2$. Według tego odwzorowania

$$G(\partial_\varphi) = \sin^2 \vartheta d\varphi, \quad G(\partial_\vartheta) = d\vartheta.$$



Mamy teraz wystarczającą wiedzę, aby zapisać definicję gradientu na dowolnej powierzchni z iloczynem skalarnym. **Uwaga!!! Gradient ma sens jedynie w obecności iloczynu skalarnego !!!**

Definicja 12 Niech S będzie powierzchnią z iloczynem skalarnym g . *Gradientem* funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ w punkcie x nazywamy wektor styczny $G^{-1}(df(x))$. Możemy także zdefiniować pole wektorowe $\text{grad } f$ wzorem

$$\text{grad } f = G^{-1} \circ df$$

Przykład 9 Gradient funkcji f na sferze z indukowanym iloczynem skalarnym wyraża się wzorem

$$\text{grad } f = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \partial_\varphi + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \partial_\vartheta$$



Te pola fizyczne, które mają potencjał skalarny, czyli są gradientami funkcji, często lepiej jest traktować jako pola kowektorowe (rózniczkę funkcji) niż gradient. W elektrodynamice klasycznej pole elektryczne jest zdecydowanie polem kowektorowym, czyli jednoformą. Większość rachunków związanych z takim polem wykonuje się łatwiej z użyciem form niż wektorów.

3 Alternatywne spojrzenie na wektory styczne

Definicja 13 *Algebrą* nazywamy przestrzeń wektorową \mathcal{A} wyposażoną w działanie $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, zwane zazwyczaj mnożeniem, które jest liniowe ze względu na każdy argument.

Algebra jest pojęciem bardzo ogólnym. Często dodaje się do niej rozmaite doprecyzowujące przymiotniki: algebra łączna oznacza, że mnożenie ma własność łączności, algebra z jedynką oznacza, że w algebrze jest element neutralny ze względu na mnożenie, algebra Liego oznacza, że mnożenie jest antysymetryczne i spełnia dodatkowy warunek nazywany tożsamością Jacobiego... itd. Jak w przypadku każdej struktury algebraicznej mówimy o homomorfizmach algebr, czyli liniowych odwzorowaniach zachowujących strukturę algebry. W świecie algebr są też inne ważne odwzorowania

Definicja 14 Niech \mathcal{A}, \mathcal{B} będą algebrami i niech $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ będzie homomorfizmem algebr. Odwzorowanie liniowe $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ nazywamy *różniczkowaniem* nad homomorfizmem ρ jeśli spełniony jest warunek

$$D(a_1 a_2) = D(a_1) \rho(a_2) + \rho(a_1) D(a_2).$$

Z całą pewnością spotkali się już państwo z takim odwzorowaniem. Jeśli $\mathcal{A} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ oznacza algebrę różniczkowalnych funkcji rzeczywistych, \mathcal{B} jest po prostu \mathbb{R} a homomorfizm ρ oznacza ewaluację funkcji w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, to obliczanie pochodnej funkcji w punkcie x_0 jest różniczkowaniem. Istotnie, zgodnie z regułą Leibniza mamy

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Jeśli teraz $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(A)$ dla przestrzeni afinicznej A , $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ a ρ jest jak poprzednio ewaluacją funkcji w punkcie a , to każda krzywa γ przechodząca przez a dla $t = 0$ definiuje różniczkowanie algebry $\mathcal{C}^\infty(A)$ o wartościach w \mathbb{R} . Istotnie, jeśli $D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0)$ to

$$D_\gamma(fg) = ((fg) \circ \gamma)'(0) = f(\gamma(0))(g \circ \gamma)'(0) + g(\gamma(0))(f \circ \gamma)'(0) = f(a)D_\gamma(g) + g(a)D_\gamma(f)$$

W powyższych rachunkach zrobiliśmy użytek z przemienności algebry funkcji nie dbając o kolejność mnożenia. Oczywiście różne krzywe mogą definiować to samo różniczkowanie, precyzyjniej krzywe, które mają ten sam wektor styczny definiują to samo różniczkowanie.

Wniosek 2 *Wektory styczne w punkcie a są różniczkowaniami algebry funkcji gładkich na A .*

Powstaje teraz pytanie czy każde różniczkowanie jest tej postaci? Okazuje się, że tak. Żeby to stwierdzić potrzebujemy pewnego lematu dotyczącego funkcji na \mathbb{R}^n :

Lemat 1 (O funkcjach znikających w punkcie) *Niech f będzie funkcją gładką na otoczeniu \mathcal{O} punktu $0 \in \mathbb{R}^n$. Niech także $f(0) = 0$. Wówczas $f(x) = x^i g_i(x)$ dla pewnych funkcji gładkich g_i .*

Dowód: Ustalmy $x \in \mathcal{O}$ i zdefiniujmy

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = f(0 + tx).$$

Odcinek I jest na tyle duży, żeby zawierać 0 i 1. Funkcja F jest gładka, gdyż funkcja f jest gładka, wiadomo także, że $F(0) = 0$. Zgodnie z podstawowym twierdzeniem rachunku różniczkowego i całkowego

$$F(1) = \int_0^1 F'(s) ds, \quad F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)x^i.$$

Możemy więc napisać równość

$$f(x) = F(1) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)x^i ds = x^i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx) ds = x^i g_i(x)$$

dla

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx) ds.$$

Skoro funkcja f jest gładka, to funkcje g_i także są gładkie (twierdzenia o całkach z parametrem). \square

Teraz możemy już udowodnić, że

Fakt 2 Dla każdego różniczkowania D algebry $C^\infty(A)$ w punkcie a istnieje krzywa γ taka, że $D(f) = (f \circ \gamma)'(0)$.

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że jeśli algebry o których mowa są algebrami z jedyneką, to różniczkowanie znika na elementach proporcjonalnych do jedynki. Istotnie

$$D(1_A) = D(1_A \cdot 1_A) = \rho(1_A)D(1_A) + (1_A)\rho(1_A) = 1_B D(1_A) + D(1_A)1_B = 2D(1_A).$$

Skoro więc $D(1_A) = 2D(1_A)$ to oczywiście $D(1_A) = 0$ i z liniowości $D(\lambda 1_A) = 0$. Jedyneką w algebrze funkcji na A jest funkcja stała równa 1. Nasze różniczkowanie D znika więc na funkcjach stałych.

W dalszym ciągu używać będziemy afinicznego układu współrzędnych na A zadanego przez bazę (e_i) w przestrzeni modelowej V oraz punkt a , tzn.

$$\mathbb{R}^n \ni (x^1, \dots, x^n) \mapsto b = a + x^i e_i \in A.$$

Funkcje na A można zapisywać jako funkcje na \mathbb{R}^n składając z powyższym odwzorowaniem. Współrzędne x^i dobrze jest traktować jak funkcje na A . Jeśli (ϵ^i) jest bazą dualną do (e_i) to

$$x^i(b) = \epsilon^i(b - a).$$

W otoczeniu punktu a (we współrzędnych punkt 0) funkcję gładką można zapisać w myśl lematu jako

$$f(b) = f(a) + x^i(b)g_i(b).$$

Wtedy

$$D(f) = D(f(a) + x^i g_i) = D(x^i g_i) = x^i(a)D(g_i) + D(x^i)g_i(a) = D(x^i)g_i(a). \quad (3)$$

Wartość D na f zdeterminowana jest więc poprzez układ n liczb $v^i = D(x^i)$ będących wartościami D na funkcjach współrzędnościowych. Łatwo teraz zaproponować krzywą γ taką, że $D_\gamma = D$, mianowicie $\gamma(t) = a + tv^i e_i$. Istotnie

$$D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}(f(a + tv^i e_i)) = \frac{d}{dt}(f(a) + x^i(a + tv^i e_i)g(a + tv^i e_i)) = v^i g_i(a) + x^i(a)g'_i(a)(v^j e_j) = v^i g_i(a) \quad (4)$$

Wyniki (3) i (4) są jednakowe (z uwzględnieniem oznaczeń), co pokazuje, że $D = D_\gamma$. \square

W ten sposób znaleźliśmy w końcu jakieś nieprzypadkowe źródło struktury wektorowej w przestrzeni stycznej – różniczkowania algebry tworzą przestrzeń wektorową! Posługując się tymi samymi metodami wykazać można łatwo podobny fakt dotyczący algebry funkcji na powierzchni i przestrzeni $\mathbb{T}S$. Wszystkie rachunki wykonywane były na współrzędnych, można więc je po prostu przepisać

Fakt 3 *Istnieje kanoniczny izomorfizm między przestrzenią różniczkowań algebry $\mathcal{C}^\infty(S)$ nad ewaluacją w punkcie x a przestrzenią styczną $T_x S$.*

Niech X będzie polem wektorowym na powierzchni S . Wartość pola w punkcie $x \in S$ jest różniczkowaniem algebry funkcji - w działaniu na funkcje zwraca liczbę. Zbierając te liczby punkt po punkcie w S otrzymujemy funkcję na S . Innymi słowy, działając polem wektorowym na funkcję na S otrzymujemy funkcję na S . Reguła Leibniza obowiązująca w punkcie przenosi się na regułę Leibniza dla działania pól na funkcjach. Pola działają na funkcjach jak różniczkowania. Odpowiedni homomorfizm algebr to tym razem identyczność. Ponieważ wszystkie różniczkowania nad ewaluacją w punkcie to wektory styczne, łatwo jest wykazać fakt

Fakt 4 *Istnieje jednoznaczna odpowiedniość między różniczkowaniami algebry $\mathcal{C}^\infty(S)$ nad identycznością i gładkimi polami wektorowymi $\mathcal{X}(S)$ na powierzchni S .*

Dowód: Działanie pola wektorowego X na funkcji f dane jest wzorem $(Xf)(x) = X(x)f$. Rachunkiem sprawdzamy, że wzór ten określa różniczkowanie. Niech teraz D będzie różniczkowaniem algebry $\mathcal{C}^\infty(S)$ nad identycznością. Wówczas złożenie $\rho_x \circ D$ jest różniczkowaniem tej algebry nad ewaluacją w punkcie x . Istotnie,

$$\begin{aligned} \rho_x \circ D(fg) &= \rho(x)(D(fg)) = \rho_x(fD(g) + gD(f)) = \\ &= f(x)D(g)(x) + g(x)D(f)(x) = f(x)\rho_x \circ D(g) + g(x)\rho_x \circ D(f). \end{aligned}$$

Zatem $\rho(x) \circ D$ jest wektorem stycznym zaczepionym w punkcie x i można zdefiniować odwzorowanie

$$X_D : S \ni x \longmapsto \rho_x \circ D \in \mathbb{T}S,$$

które jest polem wektorowym na S . Gładkość pola X_D sprawdzimy działając na funkcje współrzędnościowe (x^i) . Wiadomo, że $D(x^i)$ jest funkcją gładką, z drugiej strony $X_D(x^i) = D(x^i) = X_D^i$, gdzie

$$X_D = X_D^1 \partial_1 + \cdots + X_D^k \partial_k.$$

Funkcje X_D^i są zatem gładkie, co dowodzi gładkości pola X_D . \square

W dalszym ciągu nie będziemy odróżniać w notacji pola wektorowego od różniczkowania z nim związanego.

Definicja 15 Niech D_1 i D_2 będą różniczkowaniami algebry \mathcal{A} nad identycznością. Komutatorem różniczkowań D_1 i D_2 nazywamy odwzorowanie $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Fakt 5 *Komutator różniczkowań jest różniczkowniem.*

Dowód: Sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem. \square

Z faktów 4 i 5 wynika, że komutator różniczkowań odpowiadających polom wektorowym także jest polem wektorowym. Przeprowadzając stosowny rachunek we współrzędnych stwierdzamy, że jeśli $X = X^i \partial_i$ oraz $Y = Y^i \partial_i$ to

$$[X, Y] = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j - Y^k \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \partial_j.$$

4 Odwzorowanie styczne i cofnięcie formy

W dalszym ciągu przyda nam się jakieś oznaczenie na wektor styczny do krzywej γ w $t = 0$. Do tej pory korzystaliśmy z oznaczenia $\gamma'(0)$ odnoszącego się do faktu, że krzywa na powierzchni jest jednocześnie krzywą w przestrzeni afinicznej w której zanurzona jest ta powierzchnia, zatem pochodna odwzorowania $\mathbb{R} \rightarrow A$ w punkcie jest odwzorowaniem liniowym z \mathbb{R} do przestrzeni modelowej V . Wektor styczny to para $\gamma(0)$ i wartość pochodnej na „wektorze” $1 \in \mathbb{R}$. W geometrii różniczkowej przyjęte są dwa oznaczenia: wektor styczny do krzywej γ w $t = 0$ oznaczamy $\dot{\gamma}(0)$ albo, jeśli jest wygodniej $t\gamma(0)$. Czasami jest wygodniej użyć innej wartości parametru, piszemy wtedy $\dot{\gamma}(t)$ lub $t\gamma(t)$.

Niech M i N będą powierzchniami wymiaru m i n odpowiednio, niech także $F : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Oznacza to, jak zwykle, że gładkie są wyrażenia F w układzie współrzędnych, precyzyjniej, jeśli Φ jest układem współrzędnych w otoczeniu $x \in M$ i Ψ układem współrzędnych w otoczeniu $F(x) \in N$, to gładkie ma być odwzorowanie $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Zbadamy teraz, jaki związek między wektorami stycznymi i kowektorami na powierzchniach N i M wynika z istnienia odwzorowania F .

Krzywą $\gamma : I \rightarrow M$ złożyć można z odwzorowaniem F otrzymując krzywą w N . **Uwaga:** jeśli dwie krzywe γ_1 i γ_2 w M mają ten sam wektor styczny, to także krzywe $F \circ \gamma_1$ i $F \circ \gamma_2$ w N mają ten sam wektor styczny. Można to łatwo sprawdzić badając różniczkowania odpowiadające tym krzywym. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ mamy

$$D_{F \circ \gamma_1}(f) = (f \circ F \circ \gamma_1)'(0) = \dots$$

Na powyższy napis można też patrzeć jak na działanie różniczkowania D_{γ_1} na funkcję $f \circ F$ określona na M . Różniczkowanie to jest takie samo jak różniczkowanie D_{γ_2} . Wobec tego

$$\dots = (f \circ F \circ \gamma_2)'(0) = D_{F \circ \gamma_2}(f).$$

Z dowolności funkcji f wynika, że różniczkowania $D_{F \circ \gamma_1}$ i $D_{F \circ \gamma_2}$ są równe, odpowiadające im wektory styczne też. Ma sens zatem następująca definicja:

Definicja 16 Odwzorowanie

$$\mathbb{T}F : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}N, \quad \mathbb{T}F(t\gamma(0)) = t(F \circ \gamma)(0).$$

nazywamy *odwzorowaniem stycznym* do F .

Tym razem użyliśmy oznaczenia $t\gamma(0)$ na wektor styczny do krzywej γ w punkcie 0, gdyż stawianie kropki nad złożeniem $F \circ \gamma$ jest niewygodne. Oznaczenie $t\gamma(0)$ jest szczególnie przydatne, gdy krzywa definiująca wektor sama ma skomplikowaną i długą definicję. Odwzorowanie styczne obcięte do przestrzeni stycznej w jednym punkcie jest odwzorowaniem liniowym, elementem $L(\mathbb{T}_x N, \mathbb{T}_{F(x)} M)$.

Przykład 10 Niech $M = S^2$ będzie sferą dwuwymiarową zaś $N = \mathbb{R}^2$ płaszczyzną. Odwzorowanie F przyporządkowuje punktom na sferze rzut stereograficzny punktu względem bieguna północnego. Odwzorowanie F zapiszemy we współrzędnych przyjmując współrzędne sferyczne (φ, ϑ) na S^2 i współrzędne kartezjańskie (X, Y) na \mathbb{R}^2 .

$$F(\varphi, \vartheta) = \left(\cot \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi, \cot \frac{\vartheta}{2} \sin \varphi \right),$$

Używamy tutaj oznaczenia F na odwzorowanie wyrażone we współrzędnych zamiast $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}$, co jest w geometrii różniczkowej przyjętą praktyką. Znajdziemy obrazy wektorów stycznych ∂_φ , ∂_ϑ . Wektory te są styczne do krzywych $\gamma_\varphi(t) = (\varphi + t, \vartheta)$, $\gamma_\vartheta(t) = (\varphi, \vartheta + t)$. Obrazy wektorów ∂_φ i ∂_ϑ są styczne do krzywych

$$F \circ \gamma_\varphi(t) = \left(\cot \frac{\vartheta}{2} \cos(\varphi + t), \cot \frac{\vartheta}{2} \sin(\varphi + t) \right), \quad F \circ \gamma_\vartheta(t) = \left(\cot \frac{\vartheta + t}{2} \cos \varphi, \cot \frac{\vartheta + t}{2} \sin \varphi \right).$$

Różniczkując współrzędne po parametrze t otrzymujemy wyrażenia na $\mathbb{T}F(\partial_\varphi)$, $\mathbb{T}F(\partial_\vartheta)$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}F(\partial_\varphi) &= -\cot \frac{\vartheta}{2} \sin(\varphi) \partial_X + \cot \frac{\vartheta}{2} \cos(\varphi) \partial_Y, \\ \mathbb{T}F(\partial_\vartheta) &= -\frac{1}{2 \sin \vartheta/2} \cos(\varphi) \partial_X - \frac{1}{2 \sin \vartheta/2} \sin(\varphi) \partial_Y. \end{aligned}$$

Macierz odwzorowania liniowego $\mathbb{T}F$ z $\mathbb{T}_{(\varphi, \vartheta)} S^2$ do $\mathbb{T}_{F(\varphi, \vartheta)} \mathbb{R}^2$ w bazach pochodzących od układów współrzędnych to

$$\begin{bmatrix} -\cot \frac{\vartheta}{2} \sin(\varphi) & -\frac{1}{2 \sin \vartheta/2} \cos(\varphi) \\ \cot \frac{\vartheta}{2} \cos(\varphi) & -\frac{1}{2 \sin \vartheta/2} \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wyrazy macierzowe są funkcjami współrzędnych, ponieważ w każdym punkcie odwzorowanie styczne jest inne. Wartości $\mathbb{T}F$ są wektorami na \mathbb{R}^2 , więc czasami możemy chcieć wyrazić współczynniki przy wektorach bazowych także we współrzędnych (X, Y)

$$\begin{aligned} \mathbb{T}F(\partial_\varphi) &= -Y \partial_X + X \partial_Y, \\ \mathbb{T}F(\partial_\vartheta) &= -\frac{X^2 + Y^2 + 1}{2\sqrt{X^2 + Y^2}} X \partial_X - \frac{X^2 + Y^2 + 1}{2\sqrt{X^2 + Y^2}} Y \partial_Y. \end{aligned}$$



Przykład 11 Rozważanie działania odwzorowania między powierzchniami na kowektory zaczniemy od dwóch przykładów. Zaczniemy od odwzorowania F z przykładu 10. Funkcje współrzędnościowe X i Y na \mathbb{R}^2 definiują funkcje

$$F \circ X(\varphi, \vartheta) = \cot \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi, \quad F \circ Y(\varphi, \vartheta) = \cot \frac{\vartheta}{2} \sin \varphi$$

na S^2 . Różniczki tych funkcji są elementami $\mathbb{T}^* S^2$. Możemy więc spróbować zdefiniować wartości odwzorowania kostycznego na różniczkach wzorami $T^*F(dX) = d(F \circ X)$ oraz $T^*F(dY) = d(F \circ Y)$

$$\begin{aligned} T^*F(dX) &= -\cot \frac{\vartheta}{2} \sin \varphi d\varphi - \frac{1}{2 \sin \vartheta/2} \cos \varphi d\vartheta \\ T^*F(dY) &= \cot \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi d\varphi - \frac{1}{2 \sin \vartheta/2} \sin \varphi d\vartheta \end{aligned}$$

Wygląda więc na to, że odwzorowanie kostyczne działa w drugą stronę, z $T_{(X,Y)}^*\mathbb{R}^2$ do $T_{(\varphi,\vartheta)}^*S^2$, gdzie punkty (X, Y) i (φ, ϑ) są związane przez odwzorowanie F . W tym przykładzie możemy zebrać odwzorowania kostyczne działające między przestrzeniami w ustalonych punktach w jedno odwzorowanie działające z $T^*\mathbb{R}^2$ do T^*S^2 . Na punktach zaczepienia kowektorów to odwzorowanie działa jak F^{-1} . Co jednak, gdy F nie jest odwracalne? Zastanowimy się nad tym za chwilę badając kolejny przykład. Spójrzmy jeszcze tylko na macierz odwzorowania T^*F działającego z $T_{(X,Y)}^*\mathbb{R}^2$ do $T_{(\varphi,\vartheta)}^*S^2$ w bazach złożonych z różniczek współrzędnych

$$\begin{bmatrix} -\cot \frac{\vartheta}{2} \sin \varphi d\varphi & \cot \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi d\varphi \\ -\frac{1}{2\sin \vartheta/2} \cos \varphi & -\frac{1}{2\sin \vartheta/2} \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Macierze (5) i (6) są wzajemnie transponowane. Użyte bazy w przestrzeniach stycznej i kostycznej są wzajemnie dualne, zatem odpowiednie odwzorowania są sprzężone, tzn. $(TF)^* = T^*F$. Zmiana kierunku działania odwzorowania przy sprzężeniu jest zjawiskiem znanym z algebry liniowej.



Przykład 12 Weźmy $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{R}$ i $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = y - x^2$. Odwzorowanie to nie jest odwracalne. Przeciwobraz punktu $r \in \mathbb{R}$ jest podzbiorem $\{(x, y) : y - x^2 = r\}$ w \mathbb{R}^2 , czyli parabolą o równaniu $y = x^2 + r$. Możemy zapisać odwzorowanie kostyczne między przestrzeniami $T_r^*\mathbb{R}$ i $T_{(x,y)}^*\mathbb{R}^2$, jeśli tylko $y = x^2 + r$.

$$T^*G(dr) = dy - 2xdx,$$

jednak kolekcja tych odwzorowań nie jest odwzorowaniem. Jest to jednak bez wątpienia relacja między $T^*\mathbb{R}$ a $T^*\mathbb{R}^2$.

Definicja 17 Odwzorowanie $F : M \rightarrow N$ zdaje relację T^*F między przestrzeniami kostycznymi. Dwa kowektory $\alpha \in T_x^*M$ i $\beta \in T_y^*N$ są w relacji jeśli

$$y = F(x) \quad \text{oraz} \quad \forall v \in T_x N \quad \alpha(v) = \beta(TF(v)).$$

Relację tę nazywamy *relacją kostyczną*

Jeśli F nie jest odwracalne relacja kostyczna nie jest odwzorowaniem. Na poziomie punktów zaczepienia „idzie” w tę samą stronę co odwzorowanie F , zaś na poziomie kowektorów w przeciwną. Relacja ta obcięta do przestrzeni $T_q^*M \times T_{F(q)}^*N$ jest odwzorowaniem liniowym $(TF)^*$ sprzężonym do odwzorowania stycznego. W przykładzie 11 używaliśmy nieco innej definicji odwzorowania kostycznego: $T^*F(df) = d(f \circ F)$. Czy to jest to samo? Wiemy, że każdy kowektor jest różniczką jakiejś funkcji w punkcie. Niech więc $\beta = df(y)$, $f : N \rightarrow M$. Czy $\alpha = d(f \circ F)(x)$ jest w relacji z β zgodnie z definicją? Zakładamy oczywiście, że $y = F(x)$. Niech $v \in T_x N$, niech także γ będzie krzywą w M taką, że v odpowiada różniczkowaniu D_γ .

$$\alpha(v) = \langle d(f \circ F)(x), v \rangle = D_\gamma(f \circ F) = (f \circ F \circ \gamma)'(0) = D_{F \circ \gamma}(f) = \langle df(y), TF(v) \rangle = \beta(TF(v)).$$

Jak na razie relacja kostyczna wydaje się nieco dziwniejszym obiektem niż odwzorowanie styczne. Jednak jeśli zaczniemy działać nie na pojedynczych wektorach czy kowektorach ale na polach wektorowych i formach relacja kostyczna ta okaże się dużo przyjemniejsza w obsłudze.

4.1 Transport pola wektorowego i cofnięcie formy

W poprzednim paragrafie zdefiniowaliśmy odwzorowanie styczne i relację kostyczną. Sprawdźmy jak działają one nie tylko na pojedyncze wektory i kowektory ale na pola wektorowe i formy. Niech $F : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Zauważmy, że jeśli $y = F(x)$ to dla $\beta_y \in T_y^*N$ istnieje dokładnie jeden kowektor w T_x^*M będący w relacji kostycznej z β . Wynika to z faktu, że relacja kostyczna obciąża do przestrzeni kostycznych w punktach x i $y = F(x)$ jest odwzorowaniem liniowym (sprzężonym do TF). Jeśli więc β jest jednoformą na N , to wzór

$$M \ni x \longmapsto T^*F(\beta(F(x))) \in T^*M \quad (7)$$

określa jednoformę na M . Zobaczmy jak to wygląda na diagramie

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xleftarrow{T^*F} & T^*N \\ \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right\} F^*\beta & \begin{array}{c} \pi_M \quad \pi_N \\ \downarrow \quad \downarrow \\ M \xrightarrow{F} N \end{array} & \left. \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right\} \beta \end{array}$$

Definicja 18 Jednoformę zadaną wzorem (7) oznaczamy będziemy $F^*\beta$ i nazywamy *cofnięciem formy* β przez odwzorowanie F . Zamiast „cofnięcie” mówi się też czasami „pull-back”.

Szczególnie prosto wygląda wzór na cofnięcie jednoformy, która jest różniczką funkcji

$$F^*df = d(f \circ F).$$

Gdybyśmy funkcję $f \circ F$ oznaczyli F^*f i nazwali cofnięciem funkcji, moglibyśmy stwierdzić, że cofnięcie jest przemienne z braniem różniczki $F^*df = d(F^*f)$.

Nieco gorzej ma się sprawa z polami wektorowymi. Odwzorowanie styczne działa „z prawej do lewej”

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{TF} & TN \\ \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right\} X & \begin{array}{c} \tau_M \quad \tau_N \\ \downarrow \quad \downarrow \\ M \xrightarrow{F} N \end{array} & \left. \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right\} ? \end{array}$$

i jeśli istnieją $x_1 \neq x_2$ takie, że $F(x_1) = F(x_2)$ to może się zdarzyć, że $TF(X(x_1)) \neq TF(X(x_2))$. W takim przypadku pola X nie można przetransportować z M do N . Każde pole wektorowe da się przetransportować jedynie gdy F jest dyfeomorfizmem:

$$F_*X(y) = TF(X(F^{-1}(y))). \quad (8)$$

Jeśli F nie jest dyfeomorfizmem dają się (czasami) przetransportować niektóre pola. Na przykład jeśli $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x$ to transport istnieje dla pól postaci $X = f(x)\partial_x + g(x, y)\partial_y$. Wtedy $F_*X = f(x)\partial_x$.

Definicja 19 Pole wektorowe zdefiniowane wzorem (8) nazywamy *transportem pola* X przez odwzorowanie F . Zamiast „transport” mówi się też czasami „popchniecie” lub „push-forward”.

5 Wielokowektory i wieloformy na powierzchni

Poniższe notatki powstały z użyciem notatek do wykładów Matematyka II i Matematyka III, więc mogą Państwo mieć czasami wrażenie, że autor niepotrzebnie rozdziela włos na czworo. Z drugiej strony jednak „wykładanie kawy na ławę” ma też swoje zalety...

Definicja 20 Niech V będzie n -wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. Formą k -liniową nazywamy odwzorowanie:

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe ze względu na każdy argument, tzn. dla każdego i , dowolnych wektorów v_j , $j = 1 \dots k$, v'_i i dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\omega(v_1, v_2, \dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots, v_k) = \lambda \omega(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k) + \mu \omega(v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_k)$$

Z kursu algebry i analizy znają państwo dobrze formy dwuliniowe, szczególnie dwuliniowe symetryczne (np. iloczyn skalarny, druga pochodna funkcji wielu zmiennych obliczona w ustalonym punkcie, tensor bezwładności ciała sztywnego...).

Wśród wszystkich form k -liniowych wyróżnimy teraz szczególnie funkcje *antysymetryczne*, to znaczy mające własność

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = -\omega(v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \quad (9)$$

dla dowolnych $i \neq j$. Formy k -liniowe antisymetryczne nazywane są też *k-formami antisymetrycznymi*, lub *k-kowektorami*.

Omawiając odwzorowania liniowe i formy dwuliniowe stwierdziliśmy, że własność liniowości powoduje, że odwzorowanie jest jednoznacznie określone przez wartości na wektorach bazowych. Stąd na przestrzeni n -wymiarowej do zdefiniowania formy dwuliniowej potrzeba n^2 liczb:

$$Q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_{ij} = Q(e_i, e_j).$$

Jeśli wiadomo, że forma jest symetryczna, wtedy wystarczy $n(n+1)/2$ wartości. Jeśli forma jest antisymetryczna potrzeba jeszcze mniej $n(n-1)/2$, gdyż wyrazy diagonalne Q_{ii} muszą być zero: z warunku antisymetrii wynika, że dla dowolnego $v \in V$

$$Q(v, v) = -Q(v, v)$$

Po opuszczeniu kolorów (w końcu v i v to ostatecznie ten sam wektor v) dostajemy

$$Q(v, v) = -Q(v, v), \quad (10)$$

czyli $Q(v, v) = 0$. Innymi słowy przestrzeń wektorowa wszystkich form dwuliniowych ma wymiar n^2 a podprzestrzeń form symetrycznych i antisymetrycznych wymiary odpowiednio $n(n+1)/2$ i $n(n-1)/2$. Jeśli zauważymy ponadto, że forma, która jest jednocześnie symetryczna i antisymetryczna musi być zerowa, oraz że

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = n^2$$

zrozumiemy, że przestrzeń wszystkich form dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni form symetrycznych i podprzestrzeni form antysymetrycznych. Każda forma dwuliniowa da się więc rozłożyć w sposób jednoznaczny na część symetryczną i antysymetryczną:

$$Q(v, w) = Q_-(v, w) + Q_+(v, w)$$

$$Q_-(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) - Q(w, v)], \quad Q_+(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) + Q(w, v)].$$

Dla $k > 2$ także jest prawdą, że forma k -liniowa jest jednoznacznie określona przez wartości na bazie, zatem przestrzeń takich odwzorowań jest przestrzenią wektorową wymiaru n^k . W tej przestrzeni są także wyróżnione podprzestrzenie form symetrycznych i antysymetrycznych, których częścią wspólną jest przestrzeń zerowa, ale podprzestrzenie te nie wyczerpują przestrzeni wszystkich form. Zastanówmy się nad wymiarem przestrzeni $\bigwedge^k V^*$ form antysymetrycznych (pochodzenie dziwnego oznaczenia $\bigwedge^k V^*$ wyjaśni się wkrótce). Niech ω oznacza formę antysymetryczną. W zbiorze n^k liczb

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

jest wiele zer. Wystarczy, że w układzie $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ którykolwiek wektor bazowy powtarza się, a już wartość ω na tym układzie musi być równa zero jak w (10). Jeśli zaś układ $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ nie zawiera powtarzających się wektorów, to wartość ω na tym układzie różni się od wartości ω na układzie zawierającym te same wektory tylko uporządkowane rosnąco ze względu na indeks, tylko znakiem. **Wniosek:** do zdefiniowania k -formy wystarczy tyle liczb ile jest różnych podzbiorów k -elementowych w zbiorze n -elementowym. Sięgając do wiedzy z zakresu kombinatoryki stwierdzamy, że jest ich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{tzn.} \quad \dim \bigwedge^k V^* = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Powyższe rozważania prowadzą także do wniosku, że przestrzeń k -form antysymetrycznych dla $k > n$ jest zerowa, natomiast przestrzeń n -form ma wymiar równy 1. Znamy już przynajmniej jeden przykład n -kowektora: Jeśli kolumny macierzy potraktujemy jak elementy \mathbb{R}^n wyznacznik jest n -kowektorem na \mathbb{R}^n . Podsumujmy teraz własności k -kowektorów. W poniższych wypowiedzach α jest k -kowektorem:

- Jeśli wśród argumentów α którykolwiek z wektorów powtarza się, wartość α na tym układzie wektorów jest równa zero. Wynika z tego, że
- jeśli v_1, v_2, \dots, v_k jest układem liniowo-zależnym to $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$.
- Jak każde odwzorowanie liniowe α jest jednoznacznie określone na wektorach bazowych. Jeśli (e_1, e_2, \dots, e_n) jest bazą w V to liczby

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} = \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}), \quad 0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k < n + 1$$

wyznaczają jednoznacznie odwzorowanie α . Wynika z tego, że

- $\dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Skoro znamy już wymiar przestrzeni k -kovektorów, przydałby nam się także jakaś wygodna baza. Jako narzędzie do konstrukcji takiej bazy posłużą następujące pojęcie:

Definicja 21 *Iloczynem zewnętrznym* k -kovektora α i l -kovektora β jest $(k+l)$ -kovektor zadany wzorem

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!} \alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(l+2)}, \dots, v_{\sigma(l)}).$$

Zanim zastanowimy się nad własnościami iloczynu zewnętrznego przyjrzyjmy się przykładom dla konkretnych (nie dużych) k i l . Niech $k = 1$ i $l = 1$, czyli α, β są po prostu kovektorami na V . Wtedy $\alpha \wedge \beta$ jest 2-kovektorem określonym wzorem

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \frac{\text{sgn } \sigma}{1!1!} \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}).$$

W grupie permutacji S_2 są tylko dwie permutacje: identyczność (parzysta) i jedna transpozycja $(1\ 2)$ (nieparzysta). Wzór przyjmuje więc postać

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1)$$

Teraz załóżmy, że α jest 2-kovektorem a β kovektorem. Potrzebujemy więc permutacji z S_3 . W tej grupie jest sześć permutacji: trzy transpozycje $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$ (nieparzyste), dwa cykle $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$ i identyczność. Wzór na iloczyn zewnętrzny przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) &= \frac{1}{2!1!} (+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) - \alpha(v_3, v_2)\beta(v_1) \\ &\quad + \alpha(v_3, v_1)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)) = \end{aligned}$$

Wyrazy zaznaczone tym samym kolorem różnią się jedynie kolejnością argumentów 2-kovektora α . Po uporządkowaniu można je dodać. Trzeba jedynie pamiętać o zmianie znaku przy zamianie kolejności argumentów:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2!1!} (+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) + \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) \\ &\quad + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)) = \\ &= \frac{1}{2} (+2\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - 2\alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + 2\alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)) = \\ &\quad \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1). \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) = \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1).$$

Jako ostatniej przyjrzyjmy się sytuacji kiedy oba czynniki iloczynu zewnętrznego są 2-kovektorami. Potrzebujemy teraz permutacji z S_4 . Poprzedni przykład pokazuje, że istotny jest

jedynie podział argumentów między czynniki. Argumenty jednego 2-kowektora porządkujemy rosnąco dodając podobne składniki. W tym przypadku mamy sześć możliwych podziałów zbioru indeksów $\{1, 2, 3, 4\}$ pomiędzy 2-kowektory α i β :

$$\begin{aligned}\{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 3\} \cup \{2, 4\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 4\} \cup \{2, 3\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{2, 3\} \cup \{1, 4\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{2, 4\} \cup \{1, 3\} \\ \{1, 2, 3, 4\} &= \{3, 4\} \cup \{1, 2\}.\end{aligned}$$

Argumenty z indeksami z pierwszego zbioru będziemy wstawiać do α a z drugiego do β . Pierwszemu z podziałów odpowiadają cztery możliwe permutacje:

$$\text{id}, \quad (1\ 2), \quad (3\ 4), \quad (1\ 2)(3\ 4)$$

Pierwsza i ostatnia są parzyste, druga i trzecia nieparzyste. Permutacje te mieszają indeksy w ramach podziału, a nie między zbiorami podziału. Wkład od tych czterech permutacji do wzoru na iloczyn $\alpha \wedge \beta$ jest następujący

$$+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4) - \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3, v_4) - \alpha(v_1, v_2)\beta(v_4, v_3) + \alpha(v_2, v_1)\beta(v_4, v_3)$$

Po uporządkowaniu rosnąco argumentów obu 2-kowektorów otrzymujemy wkład

$$+4\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4).$$

Podobnie analizując każdy z możliwych podziałów i odpowiadające każdemu cztery permutacje dostaniemy wzór

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \frac{1}{2!2!} (4\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4) - 4\alpha(v_1, v_3)\beta(v_2, v_4) + 4\alpha(v_1, v_4)\beta(v_2, v_3) \\ &\quad + 4\alpha(v_2, v_3)\beta(v_1, v_4) - 4\alpha(v_2, v_4)\beta(v_1, v_3) + 4\alpha(v_3, v_4)\beta(v_1, v_2)) = \\ &\quad \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2, v_4) + \alpha(v_1, v_4)\beta(v_2, v_3) \\ &\quad + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1, v_4) - \alpha(v_2, v_4)\beta(v_1, v_3) + \alpha(v_3, v_4)\beta(v_1, v_2).\end{aligned}$$

Zupełnie nieprzypadkowo współczynniki liczbowe za każdym razem się upraszczają. Oto najważniejsze własności ioczynu zewnętrznego:

Fakt 6 1. *Iloczyn zewnętrzny jest operacją dwuliniową, tzn:*

$$(a\alpha + b\alpha') \wedge \beta = a\alpha \wedge \beta + b\alpha' \wedge \beta, \quad \alpha \wedge (a\beta + b\beta') = a\alpha \wedge \beta + b\alpha \wedge \beta'.$$

2. *Iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

3. Iloczyn zewnętrzny w ogólności nie jest przemienny, ale zachodzi wzór:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

Dowód: Pierwszy warunek wynika bezpośrednio z definicji. Dowód drugiego jest dość nieprzyjemny. Polega na pokazaniu, że lewa i prawa strona obliczona na układzie $k + l + p$ wektorów daje

$$\sum_{\sigma \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!l!p!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+p)}).$$

Istotnie, zajmijmy się najpierw lewą stroną wzoru:

$$\begin{aligned} [(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma](v_1, \dots, v_{k+l+p}) = \\ \sum_{\rho \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn}(\rho)}{(k+l)!p!} \alpha \wedge \beta(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k+l)}) \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) \end{aligned}$$

Żeby zrealizować iloczyn zewnętrzny $\alpha \wedge \beta$ musimy teraz wykonać sumowanie po wszystkich permutacjach jego argumentów. Można to zrealizować za pomocą zastosowania wszystkich możliwych permutacji $\sigma \in S_{k+l}$ do argumentów permutacji ρ . Co prawda oznacza to zastosowanie permutacji σ i ρ w odwrotnej kolejności niżby to wynikało ze wzoru definicyjnego iloczynu zewnętrznego, ale ponieważ i tak chodzi o wysumowanie po wszystkich przestawieniach, ostatecznie różnicy nie ma:

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \in S_{k+l+p}} \frac{\text{sgn}(\rho)}{(k+l)!p!} \alpha \wedge \beta(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k+l)}) \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) = \\ \sum_{\substack{\rho \in S_{k+l+p} \\ \sigma \in S_{k+l}}} \frac{\text{sgn}(\rho) \text{sgn}(\sigma)}{(k+l)!p!k!l!} \alpha(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k))}) \beta(v_{\rho(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k+l))}) \\ \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) \end{aligned}$$

W zbiorze układów wektorów

$$(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k))}, v_{\rho(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k+l))}, v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)})$$

to samo uporządkowanie występuje wiele razy. Dla różnych par ρ i σ złożenie $\rho \circ \sigma$ może być takie samo. Traktujemy tutaj permutację $\sigma \in S_{k+l}$ jako element grupy S_{k+l+p} nie ruszający ostatnich p elementów. To samo uporządkowanie (nazwijmy je ω) pojawia się tyle razy, ile jest permutacji σ , gdyż, ustaliliśmy σ , odpowiednie ρ obliczymy ze wzoru

$$\rho = \omega \circ \sigma^{-1}.$$

Z własności znaku permutacji wiadomo także, że $\text{sgn}(\rho) \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\omega)$. Zamiast sumować więc po permutacjach z S_{k+l+p} i S_{k+l} możemy sumować jedynie po permutacjach z S_{k+l+p}

uwzględniając każdą permutację $(k+l)!$ razy:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\rho \in S_{k+l+p} \\ \sigma \in S_{k+l}}} \frac{\operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\sigma)}{(k+l)!p!k!!} \alpha(v_{\rho(\sigma(1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k))})\beta(v_{\rho(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\rho(\sigma(k+l))}) \\ & \qquad \qquad \qquad \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \dots, v_{\rho(k+l+p)}) = \\ & \sum_{\omega \in S_{k+l+p}} \frac{\operatorname{sgn}(\omega)(k+l)!}{(k+l)!p!k!!} \alpha(v_{\omega(1)}, \dots, v_{\omega(k)})\beta(v_{\omega(k+1)}, \dots, v_{\omega(k+l)})\gamma(v_{\omega(k+l+1)}, \dots, v_{\omega(k+l+p)}) = \\ & \sum_{\omega \in S_{k+l+p}} \frac{\operatorname{sgn}(\omega)}{p!k!!} \alpha(v_{\omega(1)}, \dots, v_{\omega(k)})\beta(v_{\omega(k+1)}, \dots, v_{\omega(k+l)})\gamma(v_{\omega(k+l+1)}, \dots, v_{\omega(k+l+p)}). \end{aligned}$$

Podobnie postąpimy s prawą stroną wzoru. Sumować będziemy po permutacjach $\rho \in S_{k+l+p}$ a następnie $\sigma \in S_{l+p}$ aplikując σ do układu $(k+1, \dots, k+l+p)$. Zauważamy następnie, że σ można traktować jako element S_{k+l+p} nie ruszający pierwszych k liczb i że każdy układ wektorów powtarza się z tym samym znakiem $(l+p)!$ razy. W ten sposób dochodzimy do tej samej postaci wzoru po prawej stronie.

Własność trzecia jest na szczęście łatwa do uzasadnienia. Porównajmy dwa wzory:

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{k!l!} \alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(k+2)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}). \quad (11)$$

i

$$\beta \wedge \alpha = \sum_{\rho \in S_{k+l}} \frac{\operatorname{sgn} \rho}{k!l!} \beta(v_{\rho(1)}, v_{\rho(2)}, \dots, v_{\rho(l)})\alpha(v_{\rho(l+1)}, v_{\rho(l+2)}, \dots, v_{\rho(l+k)}). \quad (12)$$

W drugim wzorze możemy zamienić α z β , byle zachować argumenty:

$$\beta \wedge \alpha = \sum_{\rho \in S_{k+l}} \frac{\operatorname{sgn} \rho}{k!l!} \alpha(v_{\rho(l+1)}, v_{\rho(l+2)}, \dots, v_{\rho(l+k)})\beta(v_{\rho(1)}, v_{\rho(2)}, \dots, v_{\rho(l)}). \quad (13)$$

Składniki sumy (11) i (13) różnią się od siebie tylko znakiem. Różnica w znaku jest taka, jak różnica w znaku permutacji ρ i σ przy założeniu, że $\sigma(1) = \rho(l+1)$, $\sigma(2) = \rho(l+2)$ itd. aż do $\sigma(k) = \rho(1)$ i dalej $\sigma(k+1) = \rho(1)$ aż do $\sigma(k+l) = \rho(l)$. Te dwie permutacje różnią się o permutację

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+l \\ l+1 & l+2 & \cdots & l+k & 1 & \cdots & l \end{pmatrix},$$

której znak to dokładnie $(-1)^{kl}$. \square

Wspominaliśmy już, że każdy k -kovektor jest zadany przez swoje wartości na układach wektorów bazowych. Wartości te są współrzędnymi k -kovektora w pewnej bazie. Znajdźmy tę bazę. Niech, jak poprzednio, (e_1, e_2, \dots, e_n) będzie bazą w V . Kowektory tworzące bazę dualną oznaczmy $(\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n)$. Wybierzmy teraz k -elementowy zbiór indeksów $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ i uporządkujemy indeksy rosnąco, tzn. $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$. Interesuje nas k -kovektor

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}.$$

Jeśli w zbiorze I choć jeden indeks powtarza się, to powyższy k -kovektor jest równy zero (zamiana miejscami dwóch czynników powinna powodować zmianę znaku, jednak jeśli czynniki te są jednokowe, tak naprawdę nic się nie zmienia). Możemy więc rozważać tylko takie zbiory indeksów, że $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Obliczmy k -kovektor $\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}$ na układzie wektorów $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ (zakładamy także, że indeksy w tym układzie wektorów są uporządkowane rosnąco):

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon^{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}}) \cdot \dots \cdot \epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$$

W powyższej sumie albo wszystkie składniki są równe 0, albo jest tylko jeden niezerowy składnik. Wszystkie składniki są równe zero, jeśli zbiory $\{i_1, \dots, i_k\}$ i $\{j_1, \dots, j_k\}$ nie są identyczne. Wtedy zawsze przynajmniej jedna ewaluacja $\epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$ w każdym z iloczynów jest równa 0. Jeśli zbiory indeksów są jednakowe wtedy w powyższej sumie jest jeden niezerowy wyraz dla permutacji identycznościowej (założyliśmy początkowo, że indeksy w obu zbiorach są uporządkowane rosnąco). W takiej sytuacji otrzymujemy

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \epsilon^{i_1}(e_{i_1}) \cdot \epsilon^{i_2}(e_{i_2}) \cdot \dots \cdot \epsilon^{i_k}(e_{i_k}) = 1$$

Postulujemy, że układ k -kovektorów składający się ze wszystkich iloczynów zewnętrznych k kovektorów bazowych z odpowiednio uporządkowanymi indeksami jest dobrą bazą w $\Lambda^k V^*$. Liczba k -kovektorów w powyższym układzie się zgadza, tzn jest ich liczba równa wymiarowi przestrzeni. Ponadto układ ten jest liniowo niezależny: wystarczy obliczyć wartości kombinacji liniowej wektorów z tego układu na wszystkich k elementowych ciągach wektorów bazowych e_i z uporządkowanymi rosnąco indeksami. Na każdym z takich ciągów wartość niezerową ma tylko jeden z k -kovektorów, co daje warunek znikania współczynnika przy tym właśnie k -kovektorze. Okazuje się, że istotnie badany przez nas układ k -kovektorów jest dobrą bazą. Współrzędne rozważane przez nas wcześniej związane są właśnie z tą bazą. Oznacza to, że każdy k -kovektor α można zapisać jako kombinację liniową

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k}$$

Uwaga dotycząca zapisu z użyciem współrzędnych: Często w rachunkach wygodniej jest sumować nie po uporządkowanych zbiorach indeksów a po wszystkich. Rozważmy sprawę dla dwukovektorów. W przyjętym powyżej zapisie

$$\alpha = \sum_{i < j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j,$$

co dla $n = 3$ daje

$$\alpha = \alpha_{12} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \alpha_{13} \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + \alpha_{23} \epsilon^2 \wedge \epsilon^3.$$

Zdefiniujmy teraz α_{ij} dla $i > j$ warunkiem

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$$

Sprawdźmy (dla $n = 3$) jak się ma $\sum_{i < j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j$ do $\sum_{i, j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j$.

$$\begin{aligned} \sum_{i, j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j &= \alpha_{12} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \alpha_{13} \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + \alpha_{23} \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \alpha_{21} \epsilon^2 \wedge \epsilon^1 + \alpha_{32} \epsilon^3 \wedge \epsilon^1 + \alpha_{32} \epsilon^3 \wedge \epsilon^2 \\ &= (\alpha_{12} - \alpha_{21}) \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + (\alpha_{13} - \alpha_{31}) \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + (\alpha_{23} - \alpha_{32}) \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 \\ &= 2\alpha_{12} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + 2\alpha_{13} \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + 2\alpha_{23} \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 = 2\alpha \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\alpha = \sum_{i < j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j = \sum_{i,j} a_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j$$

czyli

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}.$$

5.1 Wieloformy na powierzchni.

Jeśli jako przestrzeń wektorową weźmiemy przestrzeń styczną $T_q M$ do powierzchni M w punkcie q , możemy mówić o wielokowektorach na powierzchni. Mamy wtedy zazwyczaj do dyspozycji bazę w $T_q M$ pochodzącą od układu współrzędnych oraz dualną do niej bazę w $T_q^* M$, składającą się z różniczek współrzędnych. Jeśli (x^1, \dots, x^n) oznaczają współrzędne na n -wymiarowej powierzchni M , to k -kowektor w punkcie $q \in M$ jest postaci

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Załóżmy teraz, że w każdym punkcie powierzchni M , a przynajmniej w każdym punkcie q pewnego otwartego zbioru $\mathcal{O} \subset M$ zadany jest kowektor $\alpha(q)$. mamy więc odwzorowanie

$$\alpha : \mathcal{O} \longrightarrow \bigwedge^k T^* M.$$

wymagać będziemy dodatkowo, aby współczynniki $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}$ zależały od punktu w taki sposób, żeby wyrażone we współrzędnych (x^1, \dots, x^m) były gładkimi funkcjami tych współrzędnych. W dziedzinie jednego układu współrzędnych możemy napisać

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x^1, \dots, x^m) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Odwzorowanie α nazywamy k -formą na \mathcal{O} .

Przykład 13 Przykładem 1-formy jest różniczka funkcji

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m.$$

Różniczka funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ma postać

$$df(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

i jest określona we wszystkich punktach \mathbb{R}^2 poza $(0, 0)$. W punkcie $(0, 0)$ funkcja f nie jest różniczkuwalna. Ta sama funkcja zapisana w biegunowym układzie współrzędnych ma postać

$$f(r, \varphi) = r,$$

zatem jej różniczka to po prostu

$$df(r, \varphi) = dr.$$



Przykład 14 Przykładem dwuformy na \mathbb{R}^2 jest tzw. forma objętości zorientowanej związana z kanonicznym iloczynem skalarnym na \mathbb{R}^2 (o formach objętości dokładniej powiemy później)

$$dx \wedge dy$$

Tę samą formę możemy wyrazić we współrzędnych biegunowych biorąc pod uwagę, że

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

Mnożymy zewnętrznie dx i dy wyrażone we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) = \\ &= (\cos \varphi dr) \wedge (\sin \varphi dr) + (\cos \varphi dr) \wedge (r \cos \varphi d\varphi) + (-r \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \varphi dr) + \\ &\quad + (-r \sin \varphi d\varphi) \wedge (r \cos \varphi d\varphi) = \\ &= \cos \varphi \sin \varphi dr \wedge dr + r \cos^2 \varphi dr \wedge d\varphi - r \sin^2 \varphi d\varphi \wedge dr - r^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Pierwszy i ostatni składnik są równe zero, ponieważ iloczyn zewnętrzny dwóch identycznych kowektorów jest równy zero. Oznacza to, że

$$dx \wedge dy = r \cos^2 \varphi dr \wedge d\varphi - r \sin^2 \varphi d\varphi \wedge dr$$

Korzystając z własności iloczynu zewnętrznego piszemy

$$d\varphi \wedge dr = -dr \wedge d\varphi,$$

zatem ostatecznie

$$dx \wedge dy = (r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi) dr \wedge d\varphi = r dr \wedge d\varphi.$$



6 Różniczka zewnętrzna.

Używaliśmy już specjalnego oznaczenia na zbiór gładkich cięć wiązki stycznej ($\mathcal{X}(M)$). Wygodnie jest także wprowadzić oznaczenie $\Omega^k(M)$ na zbiór gładkich cięć wiązki k -kowektorów: $\wedge^k \pi_M^* : \wedge^k T^*M \rightarrow M$. Wygodnie jest także uważać, że $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ oraz iloczyn zewnętrzny 0-formy i k -formy to po prostu mnożenie k -formy przez funkcję.

Fakt 7 *Operator liniowy*

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

spełniający następujące warunki: (1) d w działaniu na 0-formy jest równy zdefiniowanej wcześniej różniczce funkcji; (2) jeśli $\alpha \in \Omega^k(M)$ i $\beta \in \Omega^l(M)$ to $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$; (3) $d^2 = 0$, tzn $d(d\alpha) = 0$ dla dowolnej formy α , jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód: Załóżmy, że operator d istnieje. Wówczas warunek (2) pozwala go zadać jedynie na 0-formach i 1-formach, ponieważ wszystkie inne wyprodukujemy korzystając z liniowości i reguły Leibniza (czyli właśnie warunku (2)). Na 0-formach wartość d jest określona przez warunek (1). Każda 1-forma jest kombinacją liniową wyrażeń postaci fdg , gdzie f, g są funkcjami gładkimi. Używając więc (2) i (3) dostajemy

$$d(fdg) = df \wedge dg + fddg = df \wedge dg.$$

□.

Fakt 8 *Operator d istnieje.*

Dowód: W dziedzinie \mathcal{O} lokalnego układu współrzędnych (x^i) działanie d zadamy wzorem „we współrzędnych”. Ze względu na liniowość wystarczy wiedzieć jak działa d na formę α postaci $a(x)dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$:

$$d(a(x)dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = da \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Pozostaje sprawdzić własności (1)-(3). Warunek (1) jest spełniony automatycznie, warunek (2) sprawdzamy rachunkiem: Weźmy

$$\alpha = adx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \beta = bdx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l},$$

gdzie a i b są funkcjami we współrzędnych (x^i) , wtedy

$$\alpha \wedge \beta = abdx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}.$$

Aplikujemy operator d :

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(ab) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = \\ &= (adb + bda) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = \\ &= adb \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} + \\ &+ bda \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = \\ &= (da \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (bdx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) + \\ &+ (-1)^k (adx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (db \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) = \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

Pozostaje do sprawdzenia warunek (3). Wystarczy go sprawdzić dla funkcji:

$$ddf = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i = 0$$

Ostatnia równość wynika z równości drugich pochodnych cząstkowych mieszanych dla funkcji gładkich. Zachowania za względu na zamianę zmiennych nie musimy sprawdzać, gdyż mamy jednoznaczność □

Zanim zagłębimy się dalej w teorię policzmy dwa przykłady:

Przykład 15 Znaleźć $d\beta$, jeśli $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (xzdx + yzdy - (x^2 + y^2)dz)$$



Przykład 16 Znaleźć $d\omega$, jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$$



Przy okazji powyższych rachunków okazało się, że istnieją niezerowe (i całkiem skomplikowane) formy, których różniczka jest zero. Używać będziemy następujących nazw: jeśli $d\alpha = 0$, to α nazywa się formą *zamkniętą*, jeśli $\alpha = d\beta$, to α jest formą *pełną*. Każda forma pełna jest zamknięta. Czy jest też odwrotnie? Odpowiedź na to pytanie będzie treścią następnego wykładu.

Oprócz wzoru „na współrzędnych” oraz niekonstruktywnej definicji poprzez własności, mamy także wzór na różniczkę formy wyrażoną poprzez jej wartości na układzie pól wektorowych. Wzór ten pokazuje związek różniczkowania form z nawiasem Liego pól wektorowych:

Fakt 9 (Wzór Cartana) *Jeśli $X_1, X_2, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$ oraz $\omega \in \Omega^k(M)$, to*

$$d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-1} X_i \omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

Dowód: Sprawdźmy przede wszystkim, czy powyższy wzór na $d\omega$ określa rzeczywiście $k + 1$ -formę. Na oko widać, że wyrażenie po prawej stronie jest liniowe ze względu na każdy z argumentów, antysymetrię też dość łatwo sprawdzić. Trzeba jeszcze jednak zwrócić uwagę na to, czy wartość prawej strony zależy jedynie od wartości pól w punkcie a nie na przykład także od pochodnych tych pól. Na pierwszy rzut oka pochodne mogą być zaangażowane, gdyż we wzorze występuje nawias pól a także działanie pola na funkcję skonstruowaną z formy i pozostałych pól. Sprawdzić to można na przykład badając jak zachowuje się prawa strona, kiedy jedno z pól pomnożymy przez funkcję. Ze względu na antysymetrię wystarczy pomnożyć pierwsze pole. Jeśli rzeczywiście wzór określa $(k + 1)$ -formę, to powinniśmy otrzymać wzór

$$d\omega(fX_1, X_2, \dots, X_{k+1}) = f d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}), \quad (14)$$

czyli żadnego różniczkowania funkcji!!! Sprawdzamy: Gdy w pierwszej sumie weźmiemy $i = 1$, otrzymamy

$$fX_1\omega(X_2, \dots, X_{k+1}),$$

gdy $i > 1$

$$\begin{aligned} (-1)^{i-1} X_i \omega(f X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) &= \\ &= (-1)^{i-1} X_i f \omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) = \\ &= (-1)^{i-1} \left((X_i f) \omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) + f X_i \omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}) \right). \end{aligned}$$

Składnik zaznaczony na czerwono jest niepożądany, gdyż zawiera różniczkowanie funkcji f . Sprawdzamy kolejne składniki. W drugiej sumie, gdy $i \neq 1$ mamy

$$\begin{aligned} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], f X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) &= \\ &= (-1)^{i+j} f \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

Jeśli jednak $i = 1$ to nawias przyjmuje postać

$$[f X_1, X_j] = f[X_1, X_j] - (X_j f) X_1,$$

co po wstawieniu „pod ω ” daje

$$\begin{aligned} (-1)^{1+j} \omega(f[X_1, X_j] - (X_j f) X_1, X_2, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) &= \\ &= (-1)^{1+j} f \omega([X_1, X_j], X_2, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) - (-1)^{1+j} (X_j f) \omega(X_1, X_2, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

Kolejne wyrażenie na czerwono też jest niepożądane, gdyż zawiera różniczkowanie funkcji. Jednak oba czerwone składniki różnią się znakiem (dla $i = j$) zatem uproszczą się w wyrażeniu po prawej stronie wzoru Cartana. Wyrażenie to zależy więc tylko od wartości pól w punkcie a nie w pewnym otoczeniu. Teraz wystarczy tylko sprawdzić, czy wzór ten daje to co trzeba we współrzędnych. W tym celu trzeba obliczyć prawą stronę na polach współrzędnościowych $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Jest to bardzo proste, ponieważ pola współrzędnościowe komutują, znika więc druga suma we wzorze. Dalszy rachunek jest już oczywisty. \square

Zobaczmy, jak wygląda różniczka funkcji f , jednoformy η i dwuformy postaci $d\eta$ według wzoru Cartana:

$$df(X) = Xf$$

$$d\eta(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])$$

Policzmy teraz $dd\eta(X, Y, Z)$. Oczywiście powinno wyjść zero:

$$\begin{aligned} 0 = dd\eta(X, Y, Z) &= \\ Xd\eta(Y, Z) - Yd\eta(X, Z) + Zd\eta(X, Y) - d\eta([X, Y], Z) + d\eta([X, Z], Y) - d\eta([Y, Z], X) &= \\ X(Y\eta(Z) - Z\eta(Y) - \eta([Y, Z])) & \\ - Y(X\eta(Z) - Z\eta(X) - \eta([X, Z])) & \\ + Z(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])) & \\ - [X, Y]\eta(Z) + Z\eta([X, Y]) + \eta([[X, Y], Z]) & \\ + [X, Z]\eta(Y) - Y\eta([X, Z]) - \eta([[X, Z], Y]) & \\ - [Y, Z]\eta(X) + X\eta([Y, Z]) + \eta([[Y, Z], X]) &= \end{aligned}$$

Jednokolorowe wyrażenia się upraszczają i zostaje

$$= -X\eta([Y, Z]) + Y\eta([X, Z]) - Z\eta([X, Y]) \\ + Z\eta([X, Y]) + \eta([[X, Y], Z]) - Y\eta([X, Z]) - \eta([[X, Z], Y]) + X\eta([Y, Z]) + \eta([[Y, Z], X]) =$$

Jednokolorowe znowu się upraszczają, teraz zostaje

$$= \eta([[X, Y], Z] - [[X, Z], Y] + [[Y, Z], X])$$

Znikanie drugiej różniczki jest więc równoważne tożsamości Jacobiego.

Cofnięcie formy a różniczka. Niech $\varphi : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Dyskutowaliśmy już cofnięcie różniczki funkcji określone wzorem

$$\varphi^*df = d(f \circ \varphi).$$

Zauważmy, że zachodzi

$$(\varphi^*df)(v) = df(\mathbb{T}\varphi(v)).$$

Korzystając z tej obserwacji można zdefiniować cofnięcie dowolnej k -formy:

$$\varphi^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(\mathbb{T}\varphi(v_1), \dots, \mathbb{T}\varphi(v_k))$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta.$$

Jak zachowuje się cofnięcie formy względem różniczki?

Fakt 10

$$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$$

Dowód: Lokalnie każda forma jest sumą wyrażeń postaci

$$fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k.$$

Mamy więc

$$\varphi^*(fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = (f \circ \varphi)(\varphi^*dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^*dg_k)$$

i

$$d[\varphi^*(fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k)] = d(f \circ \varphi) \wedge (\varphi^*dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^*dg_k) = (\varphi^*df) \wedge (\varphi^*dg_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^*dg_k)$$

Z drugiej strony

$$d(fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$$

i

$$\varphi^*d(fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = (\varphi^*df) \wedge (\varphi^*dg_1) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dg_k).$$

□

7 Formy zamknięte i zupełne

Policzmy różniczkę następującej formy różniczkowej określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$\alpha = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)} dy \wedge dx - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)} dx \wedge dy = \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)} dy \wedge dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)} dy \wedge dx = \frac{x^2 - y^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)} dy \wedge dx = 0 \end{aligned}$$

Okazuje się więc, że forma ewidentnie niezerowa, mająca współczynniki wyrażające się dość skomplikowanymi wzorami i nie będące stałymi funkcjami ma różniczkę równą zero. Już wiemy, że tak powinno być jeśli forma α jest zupełna, to znaczy jeśli $\alpha = df$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$. Spróbujmy znaleźć taką funkcję. Dla form określonych na całym \mathbb{R}^2 i mających znikającą różniczkę procedura znajdowania odpowiedniej funkcji jest względnie prosta: Niech $\beta = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ będzie gładką formą na \mathbb{R}^2 taką, że $d\beta = 0$. Co to oznacza dla współczynników f i g :

$$\begin{aligned} d\beta &= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ d\beta = 0 &\iff \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

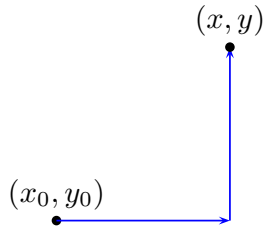
Niech teraz (x_0, y_0) będzie dowolnym punktem \mathbb{R}^2 . Funkcja

$$h(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x, t) dt$$

jest gładką funkcją na \mathbb{R}^2 , ponadto

$$\begin{aligned} dh(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x, t) dt \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x, t) dt \right) dy = \\ &= \left(f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt \right) dx + g(x, y) dy = \\ &= \left(f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \right) dx + g(x, y) dy = \\ &= (f(x, y_0) + f(x, y) - f(x, y_0)) dx + g(x, y) dy = \beta \end{aligned}$$

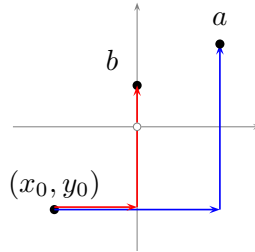
W powyższym rachunku skorzystaliśmy z równości pochodnych cząstkowych funkcji f i g . O powyższej procedurze można myśleć jak o całkowaniu formy β po łamanej składającej się z odcinków od (x_0, y_0) do (x, y_0) i dalej od (x, y_0) do (x, y) jak na rysunku 12. Na kolejnych wykładach mówić będziemy o całkowaniu form i wtedy okaże się, że jest to dokładnie to. Na razie jednak powyższe całki można całkować jako całki z parametrem. Wynik całkowania jest



Rys. 12: Metoda całkowania

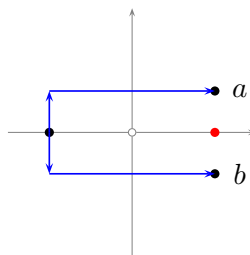
funkcją punktu końcowego. Ponieważ przepis dotarcia do punktu końcowego jest jednoznacznie określony dostajemy dobrze określoną funkcję. Własności całek zapewniają gładkość tej funkcji. Funkcję h nazwiemy *funkcją pierwotną* formy β . Ze względu na dowolność wyboru (x_0, y_0) funkcji pierwotnych jest wiele. Dwie funkcje pierwotne tej samej formy β różnią się o funkcję, której różniczka jest równa 0, czyli o funkcję stałą.

Spróbujmy tak samo znaleźć funkcję pierwotną formy α . Napotkamy tutaj na następujący problem: Do punktu b nie możemy dojść „według przepisu” ponieważ musielibyśmy przejść



Rys. 13: Kłopoty w $(0, 0)$

przez punkt w którym forma nie jest określona (rysunek 13) . Nie da się więc policzyć jednej z całek występujących we wzorze. Można spróbować obejść ten problem definiując bardziej skomplikowane przepisy dochodzenia do każdego z punktów. Jeśli np. $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ możemy ustanowić następującą zasadę: do punktów w górnej półpłaszczyźnie dochodzimy idąc najpierw w górę potem poziomo, a w dolnej najpierw w dół, potem poziomo (rysunek 14). Co jednak

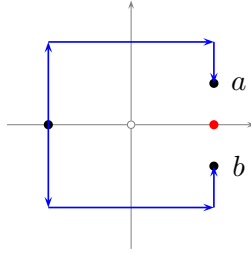


Rys. 14: Omijamy $(0, 0)$?

zrobić z punktami na dodatniej półosi poziomej? Okazuje się, że nie da się wymyślić takiego przepisu, żeby funkcja pierwotna określona była także w punktach półosi poziomej dodatniej i jednocześnie była ciągła. Jeśli na przykład $a = (1, \epsilon)$ a $b = (1, -\epsilon)$, to zgodnie opisanym powyżej przepisem

$$h(a) = \arctan(\epsilon) + 2 \arctan(1/\epsilon), \quad h(b) = -\arctan(\epsilon) - 2 \arctan(1/\epsilon).$$

Gdy ϵ dąży do zera granica „od góry” jest π a od dołu $-\pi$. Może jednak tak jest źle, bo zmniejszanie epsilon oznacza, że trzeba w granicy przejść przez niedozwolony punkt. Co zmieni się, jeśli droga będzie wyglądała jak na rysunku 15? Droga od góry to



Rys. 15: A może lepiej tak...

$$h(a) = \arctan(1) + \arctan(1) - \arctan(-1) - \arctan(\epsilon) + \arctan(1) = \pi - \arctan(\epsilon)$$

a droga od dołu

$$h(b) = -\arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(-1) + \arctan(\epsilon) - \arctan(1) = -\pi + \arctan(\epsilon)$$

Gdy zmniejszamy epsilon droga od góry daje w granicy wartość π , a od dołu $-\pi$. Konstruując funkcję pierwotną do β napotykamy wciąż na trudności. Uzasadnijmy ostatecznie, że zrobić się tego nie da. Najłatwiej będzie użyć dwóch układów współrzędnych typu biegunowego. Proste rachunki pokazują, że w układzie współrzędnych (r, φ) takim, że $r > 0$ i $\varphi \in]0, \infty[$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ określonym na obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0), t \geq 0\}$ otrzymujemy $\beta = -d\varphi$. Jedną z możliwych funkcji pierwotnych (w tym obszarze) to $h_0(r, \varphi) = -\varphi$. Podobny układ współrzędnych możemy zadać tymi samymi wzorami zastępując r przez \tilde{r} i φ przez $\tilde{\varphi}$ w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0), t \leq 0\}$ dla $\tilde{\varphi} \in]-\pi, \pi[$. Znowu $\beta = -d\tilde{\varphi}$ i jedna z możliwych funkcji pierwotnych ma postać $h_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = -\tilde{\varphi}$. Załóżmy teraz, że istnieje funkcja pierwotna f określona na całej dziedzinie formy β . Funkcja ta może różnić się od h_0 i h_1 w obszarze ich określoności co najwyżej o stałą. Niech więc $f = h_0 + \varphi_0$ i $f = h_1 + \varphi_1$. Porównajmy wartości funkcji w punktach $p = (0, 1)$ i $q = (0, -1)$.

$$h_0(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_0(q) = \frac{3\pi}{2}, \quad h_1(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_1(q) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(p) = \frac{\pi}{2} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \varphi_1,$$

$$f(q) = \frac{3\pi}{2} + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi + \varphi_0 = \varphi_1$$

Porównanie wartości funkcji f w punktach q i p prowadzi do sprzeczności. Funkcja f pierwotna do β na całej dziedzinie tej formy nie istnieje! Powyższy przykład pokazuje też, że problem leży nie tyle w formie, co w obszarze na którym ta forma jest określona.

Definicja 22 Mówimy, że rozmaitość M jest *ściągalna do punktu* $x_0 \in M$ jeśli istnieje gładkie odwzorowanie

$$H : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

takie, że

$$\forall x \in M \quad H(x, 1) = x, \quad \forall x \in M \quad H(x, 0) = x_0.$$

Płaszczyzna \mathbb{R}^2 jest ściągalna do zera: $H(x, y, t) = (tx, ty)$ (i do każdego innego punktu), zaś $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nie jest ściągalna do żadnego punktu. Związek istnienia formy pierwotnej z kształtem obszaru wypowiedziany jest w poniższym twierdzeniu nazywanym *Lematem Poincaré*:

Twierdzenie 3 *Każda forma zamknięta na rozmaitości ściągalnej jest zupełna.*

Dowód: Dowód przeprowadzimy w dwóch wersjach: we współrzędnych na obszarze w \mathbb{R}^n oraz bez użycia współrzędnych na powierzchni. Wersja we współrzędnych ma tę zaletę, że daje się bezpośrednio zastosować do rachunków zmierzających do znalezienia formy pierwotnej. Niech więc \mathcal{O} będzie obszarem gwiaździstym w \mathbb{R}^n względem zera. Obszar nazywany gwiaździstym względem punktu x_0 jeśli wraz z punktem x zawiera także cały odcinek łączący x_0 z x . Na obszarze gwiaździstym względem zera możemy używać odwzorowania ściąającego

$$F : [0, 1] \times \mathcal{O} \ni (t, x) \longmapsto (t \cdot x) \in \mathcal{O}.$$

Dla form na $[0, 1] \times \mathcal{O}$ zdefiniujemy także odwzorowanie liniowe

$$K : \Omega^{k+1}([0, 1] \times \mathcal{O}) \longrightarrow \Omega^k(\mathcal{O})$$

wzorami

$$K(\alpha(t, x) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \left(\int_0^1 \alpha(t, x) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad K(\alpha(t, x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}) = 0$$

Pokażemy teraz, że dla dowolnej k -formy α na \mathcal{O} zachodzi wzór

$$dK(F^*\alpha) + K(dF^*\alpha) = \alpha. \quad (15)$$

Wzór ten gwarantuje, że jeśli $d\alpha = 0$ (wtedy także $dF^*\alpha = 0$) to $\alpha = d(K(F^*\alpha))$, czyli forma zamknięta ma formę pierwotną. Wzoru (15) dowodzimy bezpośrednim rachunkiem. Ze względu na liniowość wszystkich używanych odwzorowań możemy przeprowadzić rachunek dla formy postaci $\alpha = \alpha(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

$$F^*(\alpha) = \alpha(tx) t^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{m=1}^k t^{k-1} x^{i_m} (-1)^{m-1} \alpha(tx) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \overset{\vee_{i_m}}{\dots} \wedge dx^{i_k}$$

$$K(F^*(\alpha)) = \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} x^{i_m} \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \overset{\vee_{i_m}}{\dots} \wedge dx^{i_k}$$

$$dK(F^*(\alpha)) = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \delta_j^{i_m} \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha(tx) dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \overset{\vee_{i_m}}{\dots} \wedge dx^{i_k} +$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \overset{\vee_{i_m}}{\dots} \wedge dx^{i_k} =$$

$$k \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \overset{\vee_{i_m}}{\dots} \wedge dx^{i_k}$$

(16)

$$d\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

$$\begin{aligned} dF^*\alpha = F^*d\alpha = t^{k+1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + t^k \sum_{j=1}^n x^j \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \\ \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^m t^k x^{i_m} \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(F^*d\alpha) = \sum_{j=1}^n x^j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \\ \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^m x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (17) \end{aligned}$$

Dodajemy wyniki z (16) i (17), czerwone wyrazy się upraszczają i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} dK(F^*\alpha) + K(dF^*\alpha) = \\ k \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j=1}^n x^j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\ \left(\int_0^1 \left[kt^{k-1} \alpha(tx) + \sum_{j=1}^n x^j t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} \right] dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\ \alpha(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (18) \end{aligned}$$

Dowód w wersji z użyciem współrzędnych został zakończony. Zanim przejdziemy do dowodu bez współrzędnych potrzebujemy kilku ogólnych obserwacji. Weźmy odcinek I otwarty, zawierający $[0, 1]$, rozmaitość M i rodzinę odwzorowań

$$i_t : M \rightarrow M \times I, \quad i_t(x) = (x, t).$$

Niech ω będzie jednoformą na $M \times I$. Wiadomo, że $\mathbb{T}(M \times I) = \mathbb{T}M \times \mathbb{T}I$ oraz $\mathbb{T}^*(M \times I) = \mathbb{T}^*M \times \mathbb{T}^*I$. Jednoformę ω można więc zapisać jako sumę

$$\omega = \tilde{\omega} + f dt,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to odwzorowanie $M \times I \rightarrow \mathbb{T}^*M$ zachowujące projekcję na M a f to funkcja na $M \times I$. Odnotujmy także, że

$$i_t^* \omega = \tilde{\omega}(t, \cdot).$$

Uzasadnimy teraz, że jeśli $d\omega = 0$ to $i_1^* \omega - i_0^* \omega$ jest zupełna. Różniczkę $d\omega$ wyrazić można za pomocą różniczkowania w kierunku M i kierunku I oddzielnie. $d\omega = d_M \omega + d_I \omega = d_M \tilde{\omega} + d_I \tilde{\omega} + d_M f \wedge dt$. Różniczka $d_M \tilde{\omega}$ nie zawiera czynnika dt . Różniczkę $d_I \tilde{\omega}$ interpretować można następująco. Skoro $\tilde{\omega}$ jest odwzorowaniem z $M \times I$ w $s\mathbb{T}^*M$ zachowującym rzut na M , to dla ustalonego $x \in M$ odwzorowanie $t \mapsto \tilde{\omega}(x, t)$ jest krzywą

w przestrzeni wektorowej T_x^*M . Wektor styczny do tej krzywej dla każdej wartości parametru może być interpretowany jako element tej samej przestrzeni wektorowej. Oznaczmy ten wektor przez $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}$. Różniczka

$$d_I \tilde{\omega} = dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Znikanie $d\omega$ oznacza, że

$$0 = d\omega = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + d_M f \wedge dt = d_M \tilde{\omega} + \left(d_M f - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \right) \wedge dt$$

Pierwszy składnik nie zawiera dt , więc znikanie różniczki oznacza znikanie każdego ze składników oddzielnie. W szczególności

$$d_M f = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Z definicji całki z funkcji o wartościach wektorowych mamy, że

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = \tilde{\omega}(x, 1) - \tilde{\omega}(x, 0) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} dt = \int_0^1 (d_M f)(x, t) dt = d \left(\int_0^1 f(\cdot, t) dt \right) (x)$$

Oznaczając

$$g(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$$

mamy

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = dg(x).$$

Identyczny rachunek przeprowadzić można dla k -formy ω .

$$\omega = \tilde{\omega} + dt \wedge \eta,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to rodzina k -form na M parametryzowana t a η to podobna rodzina $(k-1)$ -form.

$$d\omega = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - dt \wedge d_M \eta = d_M \tilde{\omega} + dt \wedge \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - d_M \eta \right).$$

$$d\omega = 0 \quad \text{oznacza} \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = d_M \eta.$$

Niech teraz $I : \Omega^k(M \times I) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ dane będzie wzorem

$$I(\omega)(x) = \int_0^1 \eta(x, t) dt.$$

W szczególności

$$I(d\omega) = \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - d_M \eta \right) dt = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - \int_0^1 (d_M \eta) dt = \tilde{\omega}(1, \cdot) - \tilde{\omega}(0, \cdot) - d \left(\int_0^1 \eta dt \right).$$

$$I(d\omega) + d(I(\omega)) = i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x)$$

Oczywiście gdy $d\omega = 0$ to

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = d(I(\omega)).$$

Przejdźmy teraz do właściwego dowodu lematu. Niech M będzie rozmaitością ściągającą do punktu x_0 i niech H będzie odpowiednim odwzorowaniem ściągnięcia

$$H : M \times I \rightarrow M.$$

Weźmy także zamkniętą formę α . Oczywiście skoro $d\alpha = 0$ to także $dH^*\alpha = 0$. Zgodnie więc powyższymi rachunkami

$$i_1^*H^*\alpha - i_0^*H^*\alpha = d(I(H^*\alpha)).$$

Pierwszy ze składników to

$$i_1^*H^*\alpha = (H \circ i_1)^*\omega = \omega,$$

bo H złożone z i_1 jest identycznością. W drugim składniku złożenie $(H \circ i_0)$ jest odwzorowaniem stałym: $(H \circ i_0)(x) = x_0$. Cofnięcie formy odwzorowaniem stałym jest zerowe, zatem

$$i_0^*H^*\alpha = (H \circ i_0)^*\omega = 0.$$

Ostatecznie

$$\omega = d(I(H^*\alpha)).$$

□

8 Całkowanie form różniczkowych

8.1 Orientacja

Mówimy, że dwie bazy e i f w skończonej-wymiarowej przestrzeni wektorowej V mają jednakową orientację jeśli macierz przejścia $[id]_e^f$ ma dodatni wyznacznik. Relacja *jednakowej orientacji* jest, jak łatwo sprawdzić, relacją równoważności w zbiorze baz. Dzieli ona zbiór baz na dwie klasy równoważności, które nazywamy *orientacjami*. Mówimy, że przestrzeń wektorowa jest *zorientowana* jeśli ma wyróżnioną orientację. Ze względu na własności wyznacznika orientacja bazy e zmienia się na przeciwną jeśli zmienimy znak przy jednym z wektorów bazowych lub zamienimy miejscami dwa wektory bazowe. Niektóre przestrzenie wektorowe mają kanoniczną orientację. W przestrzeni \mathbb{R}^n kanoniczna jest orientacja, której reprezentantem jest kanoniczna baza.

Przestrzeń styczna do rozmaitości w punkcie jest skończonej-wymiarową przestrzenią wektorową, więc ma dwie możliwe orientacje. Będziemy mówili, że rozmaitość M jest zorientowana, jeśli przestrzenie styczne we wszystkich punktach mają wybrane orientacje w sposób uzgodniony. Oznacza to, że w dziedzinie każdej mapy (\mathcal{O}, φ) orientacje we wszystkich punktach są zgodne lub we wszystkich punktach przeciwne niż orientacja zadana przez bazę $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$. Zauważmy, że jeśli rozmaitość jest zorientowana to można na niej wybrać atlas zgodny z orientacją. Istotnie, niech $(\mathcal{O}_i, \phi_i)_{i \in I}$ będzie dowolnym atlasem na M . Konstruujemy nowy atlas $(\mathcal{U}_i, \psi_i)_{i \in I}$ w następujący sposób: Jeśli mapa (\mathcal{O}_i, ϕ_i) jest zgodna z orientacją pozostawiamy ją bez zmian kładąc $\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i$, $\psi_i = \phi_i$. Jeśli baza pochodząca od mapy (\mathcal{O}_i, ϕ_i) ma orientację przeciwną kładziemy $\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i$ oraz jeśli $\phi_i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ kładziemy $\psi_i = (-x^1, x^2, \dots, x^n)$. Orientację na rozmaitości można też zadać wskazując atlas, w którym wyznaczniki wszystkich macierzy przejścia między pochodzącymi od współrzędnych bazami przestrzeni stycznych są dodatnie.

Okazuje się, że nie na wszystkich rozmaitościach da się wybrać orientację. Takie, na których się nie da nazywają się *nieorientowalne*. Najbardziej znanym przykładem rozmaitości nieorientowalnej jest wstęga Moebiusa. Ten przykład zostanie przeanalizowany na ćwiczeniach. Orientowalne są wszystkie powierzchnie zanurzone, które są poziomiami odwzorowania spełniającego warunki jak w twierdzeniu o definiowaniu powierzchni zanurzonej. Przyjrzyjmy się bliżej sytuacji, gdy powierzchnia S jest poziomą funkcji

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Jej przestrzeń styczna w punkcie jest jądrem pochodnej F' i jest podprzestrzenią w \mathbb{R}^n . Ze względu na istnienie kanonicznego iloczynu skalarnego można napisać

$$\mathbb{R}^n = T_x S \oplus \langle \text{grad} F(x) \rangle.$$

Ze względu na założenia $\text{grad} F$ jest nieznikającym polem wektorowym w punktach S o wartościach w \mathbb{R}^n . Orientację powierzchni S można wybrać np. w taki sposób aby w każdym punkcie baza $(\text{grad} F, f)$, gdzie f jest bazą $T_x S$ była zgodna z kanoniczną orientacją \mathbb{R}^n . Łatwo sprawdzić, że taki sposób wyboru orientacji jest zgodny.

8.2 Gładki rozkład jedności

Powierzchnie na których pracujemy są rozmaitościami parazwartymi. Oznacza to, że dla każdego pokrycia otwartego istnieje drobniejsze od niego pokrycie, które jest lokalnie skończone. Warunek *lokalnej skończoności* oznacza, że każdy punkt rozmaitości ma otoczenie, którego przecięcia z elementami pokrycia są niepuste jedynie dla skończonej liczby elementów pokrycia. Składowa spójna rozmaitości parazwartej ma też własność, która nazywa się *przeliczalnością w nieskończoności*. Oznacza to, że istnieje wstępujący ciąg zbiorów zwartych $(\mathcal{K}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ taki, że $\mathcal{K}_j \subset \text{Int}(\mathcal{K}_{j+1})$ oraz $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_i = M$.

Definicja 23 *Gładkim rozkładem jedności* na M związanym z atlasem $(O_a, \varphi_a)_{a \in A}$ nazywamy układ gładkich funkcji α_i o następujących własnościach: (1) $\forall i \in I \exists a \in A \text{ supp } \alpha_i \subset O_a$, (2) każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie \mathcal{W} takie, że $\mathcal{W} \cap \text{supp } \alpha_i \neq \emptyset$ jedynie dla skończonej liczby funkcji α_i , (3) $0 \leq \alpha_i \leq 1, \forall p \in M \sum_{i \in I} \alpha_i(p) = 1$.

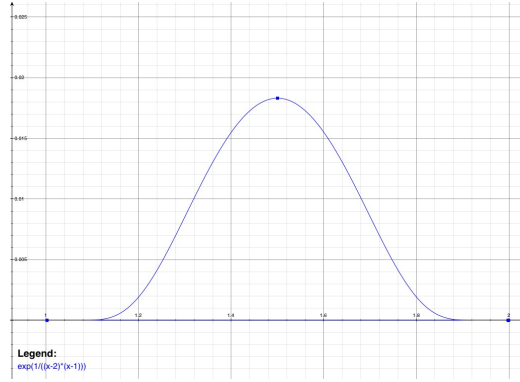
Twierdzenie 4 *Na rozmaitości parazwartej istnieje gładki rozkład jedności.*

Dowód: Rozkład jedności konstruujemy dla każdej składowej spójnej oddzielnie, dlatego założymy teraz, że M jest spójna. W dalszym ciągu B_r oznaczać będzie otwartą kulę w \mathbb{R}^n o promieniu r . Używać będziemy B_1 i B_3 . Potrzebna będzie też funkcja

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \exp\left(\frac{1}{(t-2)(t-1)}\right) \quad \text{dla } t \in]1, 2[, \quad h(t) = 0 \quad \text{w przeciwnym razie.}$$

Definiujemy teraz funkcję $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

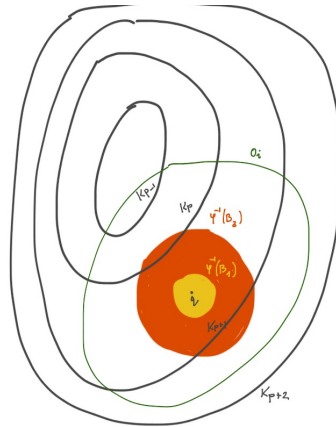
$$f(x) = \frac{\int_x^2 h(t) dt}{\int_1^2 h(t) dt}.$$



Rys. 16: Funkcja h

Funkcja ta jest gładka, ma wartość 1 dla $x \in [0, 1]$ oraz 0 dla $x \in [2, \infty[$.

Jako rozmaitość parazwarta M jest przeliczalna w nieskończoności, to znaczy można ją wyczerpać zbiorami zwartymi $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ o tej własności, że $K_i \subset \text{Int}K_{i+1}$. Rozpoczynamy od danego pokrycia otwartego $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$. Ustalmy na chwilę punkt $q \in M$. Istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $q \in K_{p+1} \setminus K_p$, istnieje także $i \in I$ takie, że $q \in \mathcal{O}_i$. Bierzymy teraz układ współrzędnych $(\mathcal{V}_q, \varphi_q)$ w otoczeniu q taki, żeby $\varphi_q(q) = 0$, $\varphi_q^{-1}(B_3) \subset \mathcal{O}_i$, $\varphi_q^{-1}(B_3) \subset K_{p+2} \setminus K_{p-1}$. Rozważając



Rys. 17: Rysunek pomocniczy

odpowiednie układy współrzędnych dla wszystkich $q \in M$ otrzymujemy atlas $(\mathcal{V}_q, \varphi_q)_{q \in M}$. W szczególności zbiory $\{\varphi_q^{-1}(B_1)\}_{q \in M}$ stanowią pokrycie otwarte \mathcal{V} rozmaitości M . Wybierzemy teraz z niego pokrycie przeliczalne, lokalnie skończone: \mathcal{V} jest także pokryciem K_1 , można więc z niego wybrać pokrycie skończone. Mamy więc (q_1, \dots, q_{j_1}) punktów takich, że $\{\varphi_{q_{j_k}}^{-1}(B_1)\}$ stanowią pokrycie K_1 . Zbiór $K_2 \setminus \text{Int}K_1$ też jest zwarty, więc ma pokrycie skończone wybrane z \mathcal{V} . To daje nam kolejne $\{q_{j_1+1}, \dots, q_{j_2}\}$ punkty, takie, że $\{\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)\}_{k \leq j_2}$ jest pokryciem K_2 . Indukcyjnie otrzymujemy $(q_{j_{p+1}}, \dots, q_{j_{p+1}})$ punktów definiujących pokrycie $K_{p+1} \setminus K_p$ i takie, że $\{\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)\}_{k \leq j_{p+1}}$ stanowią pokrycie K_{p+1} . Postępując w ten sposób otrzymujemy przeliczalne pokrycie M zbiorami $\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)$. Oczywiście także układ zbiorów $\mathcal{U}_k = \varphi_{q_k}^{-1}(B_3)$ jest pokryciem M . Wraz z odwzorowaniami φ_{q_k} układ ten tworzy atlas drobniejszy niż wyjściowe pokrycie (\mathcal{O}_i) . Łatwo też przekonać się, że atlas ten jest lokalnie skończony. Używając zdefiniowanej wcześniej

funkcji f definiujemy rodzinę funkcji d_k wzorem

$$d_k(q) = f(|\varphi_{q_k}(q)|), \quad \text{jeśli } \varphi_{q_k}(q) \text{ istnieje, w przeciwnym przypadku } d_k(q) = 0.$$

Ostatecznie

$$\alpha_k(q) = \frac{d_k(q)}{\sum_i d_i(q)}$$

jest szukanym rozkładem jedności. Nośnik każdej z funkcji α_j jest zawarty w którymś ze zbiorów wyjściowego pokrycia (\mathcal{O}_i)

Rozkładu jedności można użyć np. do pokazania następującego przydatnego twierdzenia

Twierdzenie 5 *Na rozmaitości orientowalnej wymiaru n istnieje gładka nieznikająca n -forma i odwrotnie, jeśli taka forma istnieje, to rozmaitość jest orientowalna.*

Dowód: Weźmy lokalnie skończony atlas na M taki, że wszystkie zamiany zmiennych mają dodatni jacobian. Niech $(\alpha_i)_{i \in I}$ będzie rozkładem jedności związanym z tym atlasem. W każdej dziedzinie mapy \mathcal{O}_i definiujemy formę ω_i posługując się współrzędnymi (x_i^1, \dots, x_i^n) :

$$\omega_i = \alpha_i dx_i^1 \wedge dx_i^2 \wedge \dots \wedge dx_i^n.$$

Forma

$$\omega = \sum_{i \in I} \alpha_i dx_i^1 \wedge dx_i^2 \wedge \dots \wedge dx_i^n$$

ma żadaną własność, tzn jest nieznikająca w każdym punkcie. Istotnie, niech $p \in M$ będzie dowolne, niech także $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ będzie zbiorem indeksów odpowiadających tym elementom atlasu, które przecinają się z otoczeniem \mathcal{W} punktu p . W punkcie p formę ω można więc zapisać jako

$$\omega(p) = \sum_{k=1}^m \alpha_{i_k}(p) dx_{i_k}^1 \wedge dx_{i_k}^2 \wedge \dots \wedge dx_{i_k}^n$$

Punkt p wraz z pewnym otoczeniem leży w dziedzinie każdej z map z indeksami ze zbioru $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, możemy więc wszystkie składniki powyższej sumy zapisać w jednym układzie współrzędnych, na przykład w $(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_1}^n)$:

$$\omega(p) = \left[\alpha_{i_1}(p) + \sum_{k=2}^m \alpha_{i_k}(p) \det([\varphi_{i_k} \circ \varphi_{i_1}^{-1}]') \right] dx_{i_1}^1 \wedge dx_{i_1}^2 \wedge \dots \wedge dx_{i_1}^n.$$

Wszystkie składniki powyższej sumy są dodatnie, zatem cała suma też jest dodatnia, w szczególności nie jest równa zero.

Wykażemy teraz, że jeśli istnieje nieznikająca n -forma to rozmaitość jest orientowalna. Niech ω będzie taką formą. Weźmy także atlas składający się z map o spójnych dziedzinach. W każdej z map forma ω może być zapisana we współrzędnych jako

$$f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Ponieważ dziedzina mapy jest spójna funkcja f , jako niezerowa, ma ustalony znak. Jeśli jest to znak dodatni mapę tę pozostawiamy bez zmian, jeśli zaś ujemny mapę zmieniamy na przykład

zamieniając pierwszą współrzędną na przeciwną. W ten sposób tworzymy nowy atlas w którym współczynniki funkcyjne przy współrzędnościowych n -formach dla formy ω są dodatnie. Skądinąd wiadomo, że na przecięciu dwóch map współczynniki te różnią się o jacobian zamiany zmiennych. Oznacza to, że wszystkie te jacobiany są dodatnie. Poprawiony przez nas atlas jest zgodny, tzn w szczególności może zadawać orientację na M . \square

Orientację na rozmaitości możemy więc zadać wskazując w zgodny sposób orientację każdej z przestrzeni stycznych, wskazując zgodny atlas lub wskazując niezerową formę. Orientacja zadawana przez formę, to ta orientacja przy której współczynniki funkcyjne w zapisie formy we współrzędnych są dodatnie. Formy tego rodzaju nazywa się często *formami objętości*.

8.3 Całkowanie form różniczkowych.

Na analizie zdefiniowano całkę Riemanna po nadającym się do całkowania obszarze D w \mathbb{R}^n . Nadający się do całkowania oznaczał mierzalny w sensie Jordana. Całkę Riemanna definiuje się korzystając z umiejętności liczenia objętości małych kostek w \mathbb{R}^n , wykorzystując zatem strukturę metryczną. Na rozmaitości nie mamy tej struktury, a próba skorzystania ze współrzędnych prowadzi do niepowodzenia. Nie możemy zdefiniować całki z funkcji f na rozmaitości D jako całki z $f \circ \varphi^{-1}$ po obszarze $\varphi(D)$, nawet zakładając, że mieści się on w dziedzinie jednej mapy, ponieważ wynik całkowania zależał będzie od wybranych współrzędnych. Całka w mapie (\mathcal{O}, φ) to

$$\int_{\varphi(D)} f \circ \varphi^{-1},$$

zaś całka w mapie (\mathcal{U}, ψ) to

$$\int_{\psi(D)} f \circ \psi^{-1}.$$

Całki te nie są równe, gdyż (zgodnie z twierdzeniem o zamianie zmiennych)

$$\int_{\varphi(D)} f \circ \varphi^{-1} = \int_{\psi(D)} f \circ \psi^{-1} |\det[\psi \circ \varphi^{-1}]|.$$

Do całkowania po obszarze na rozmaitości potrzebujemy więc obiektu, który transformuje się „z jacobianem zamiany zmiennych”, czyli n -formy. Przyjrzyjmy się najpierw uproszczonej sytuacji, gdy obszar D mieści się w dziedzinie jednej (a nawet dwóch) map. Niech także ω będzie n -formą na M . Jej wyrażenia we współrzędnych w obu mapach $(\mathcal{O}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ to

$$\omega = a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \omega = b(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Funkcje a i b związane są równością

$$a(x) = b(\psi \circ \varphi^{-1}(x)) \det[\varphi \circ \psi^{-1}]$$

zatem całki mogą różnić się co najwyżej o znak.

$$\int_{\psi(D)} b = \int_{\varphi(D)} b \circ \psi \circ \varphi^{-1} |\det[\varphi \circ \psi^{-1}]| = \pm \int_{\varphi(D)} a.$$

Kłopot ze znakiem bierze się z faktu, że wyznacznik jacobianu może być zarówno dodatni jak i ujemny. Wyjściem z tej sytuacji jest zdefiniowanie całki po obszarze zorientowanym. Wybór

konkretnej orientacji pozwala używać jedynie współrzędnych zgodnych z orientacją. Możemy już zdefiniować całkę po obszarze D z orientacją ι w uproszczonej sytuacji, gdy cały obszar mieści się w dziedzinie jednej mapy:

$$\int_{(D,\iota)} \omega = \int_{\varphi(D)} a \circ \varphi^{-1}, \quad \omega = a \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

gdzie (\mathcal{O}, φ) jest mapą zgodną z orientacją. Gdy obszar D nie mieści się w dziedzinie jednej mapy potrzebujemy rozkładu jedności. Weźmy lokalnie skończony atlas $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ zgodny z orientacją ι i rozkład jedności $(\alpha_i)_{i \in I}$ związany z tym atlasem. W sposób trywialny prawdą jest, że

$$\omega(p) = \sum_{i \in I} \alpha_i \omega(p)$$

Całkę z formy ω po obszarze D z orientacją ι możemy teraz zdefiniować wzorem

$$\int_{(D,\iota)} \omega = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(D \cap \mathcal{O}_i)} (\alpha_i \circ \varphi^{-1})(\omega_i \circ \varphi^{-1})$$

Dla zwartego obszaru D jedynie skończona liczba składników jest niezerowa.

Przykład 17 Obliczyć całkę z formy $\omega = dy \wedge dz$ po fragmencie sfery S^2 dla którego $x \geq 0$ i $z \geq 0$ z orientacją zadaną przez bazę wektory $(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi})$ pochodzące od sferycznego układu współrzędnych.

Forma ω zdefiniowana jest na \mathbb{R}^3 . Żeby ją scałkować po S^2 trzeba ją najpierw obciąć do S^2 . W tym celu zapisujemy włożenie $\kappa : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ we współrzędnych:

$$\kappa(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

Obcięcie formy do sfery realizuje się jako pull-back za pomocą włożenia:

$$\begin{aligned} \kappa^* \omega &= d(\sin \varphi \sin \theta) \wedge d(\cos \theta) = (\cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta) \wedge (-\sin \theta d\theta) = \\ &= (\cos \varphi \sin \theta d) \wedge (-\sin \theta d\theta) = -\cos \varphi \sin^2 \theta d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

Kolejność współrzędnych zgodna z orientacją jest (θ, φ) , więc formę zapisać należy jako

$$\omega = -\cos \varphi \sin^2 \theta d\varphi \wedge d\theta = \cos \varphi \sin^2 \theta d\theta \wedge d\varphi$$

Obszar całkowania we współrzędnych (θ, φ) to $[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ostatecznie

$$\int_{(D,\iota)} \omega = \int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos \varphi \sin^2 \theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$

8.4 Twierdzenie Stokes'a

W dalszym ciągu E oznaczać będzie półprzestrzeń w \mathbb{R}^n , tzn. zbiór

$$E = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0\}$$

z topologią indukowaną z \mathbb{R}^n (zbiory otwarte w E to przecięcia zbiorów otwartych w \mathbb{R}^n z E). Hipere płaszczyznę $\{x^1 = 0\}$ oznaczamy Π . Zauważmy, że jeśli \mathcal{O} i \mathcal{U} są otwarte w E oraz $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ jest homeomorfizmem, to obcięcie $\varphi|_{\mathcal{O} \cap \Pi}$ jest homeomorfizmem $\mathcal{O} \cap \Pi$ i $\mathcal{U} \cap \Pi$. Zbiór E służy jako „standardowa” rozmaitość z brzegiem, podobnie jak \mathbb{R}^n jest „standardową” rozmaitością (bez brzegu). Każdy kawałek rozmaitości z brzegiem powinien wyglądać jak kawałek E . Może to być kawałek brzegowy, albo kawałek z wnętrza. Do zdefiniowania struktury gładkiej rozmaitości z brzegiem potrzebujemy jeszcze pojęcia gładkości odwzorowań obszarów, których przecięcie z Π jest niepuste. Odwzorowanie $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ jest gładkie jeśli da się rozszerzyć do gładkiego odwzorowania $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\mathcal{U}}$ takiego, że $\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ są otwarte i $\mathcal{O} = E \cap \hat{\mathcal{O}}, \mathcal{U} = E \cap \hat{\mathcal{U}}$. W takim przypadku $\varphi|_{\mathcal{O} \cap \Pi}$ też jest gładkie.

Definicja 24 Przestrzeń topologiczna M jest *gładką rozmaitością z brzegiem* jeśli dla każdego $q \in M$ istnieją zbiory otwarte $q \in \mathcal{O} \subset M, \mathcal{U} \subset E$ i homeomorfizm $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$. Jeśli ponadto $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$, to odwzorowanie $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ jest gładkie.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} \cap \mathcal{O}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O} \\ \downarrow \varphi' & \swarrow \varphi' \circ \varphi^{-1} & \\ \mathcal{O}' & & \end{array}$$

W rozmaitości z brzegiem wyróżniamy punkty wewnętrzne, tzn. takie, które mają otoczenia homeomorficzne z \mathbb{R}^n i pozostałe, które nazywamy *brzegowymi*. Zbiór punktów brzegowych oznaczamy ∂M i nazywamy *brzegiem rozmaitości*. Zauważmy, że brzeg rozmaitości z brzegiem sam jest gładką rozmaitością (bez brzegu, tzn. brzeg brzegu jest pusty). Istotnie, jeśli $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ jest atlasem na M , to $(\mathcal{U}_i \cap \partial M, \varphi_i|_{\mathcal{U}_i \cap \partial M})_{i \in I}$ jest atlasem na brzegu.

Fakt 11 Niech M będzie orientowalną rozmaitością z brzegiem. Wtedy ∂M też jest orientowalna. Jeśli M jest zorientowana, to na ∂M istnieje wyróżniona orientacja.

Dowód. Wybierzmy jedną z orientacji na M . Niech $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ będzie atlasem zgodnym z orientacją. Indukowany atlas na M , którego dziedzinami są zbiory $\mathcal{O}_i \cap \partial M$ jest także atlasem zgodnym, tzn. wyznaczniki macierzy przejścia między współrzędnymi są dodatnie. Zauważmy, że jeśli $\varphi_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$ jest układem współrzędnych z dziedziną \mathcal{O} to $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2, \dots, x_i^n)$ jest układem współrzędnych z dziedziną $\mathcal{O}_i \cap \partial M$. Atlas $(\mathcal{O}_i \cap \partial M, \tilde{\varphi}_i)$ zadaje indukowaną orientację brzegu. \square

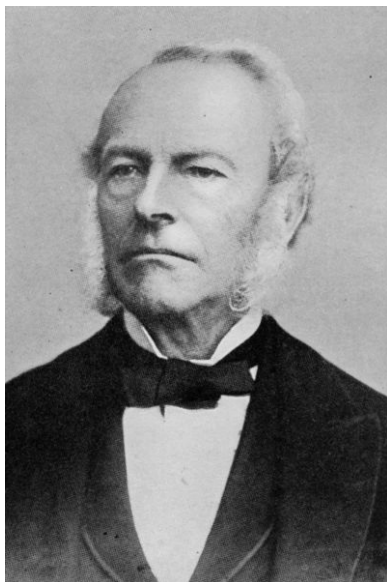
Jeśli orientację M oznaczymy ι to orientację indukowaną ∂M oznaczamy $\partial \iota$

Twierdzenie 6 (Sir George G. Stokes) Niech M będzie zwartą, zorientowaną powierzchnią z brzegiem wymiaru n i niech ω będzie $n - 1$ -formą na M , wówczas

$$\int_{(M, \iota)} d\omega = \int_{(\partial M, \partial \iota)} \omega.$$

Żeby uzyskać wgląd w sytuację zobaczmy najpierw jak wygląda całkowanie po kostce w \mathbb{R}^n . Kostka co prawda, nie jest rozmaitością z brzegiem z powodu kątów (brzeg jest jedynie kawałkami powierzchnią), jednak z punktu widzenia całkowania kąty nie są kłopotliwe. Niech D będzie n -wymiarową kostką, tzn.

$$D = [a_1, b_1] \times [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$



Rys. 18: Sir George Gabriel Stokes

Brzeg D jest jedynie kawałkami powierzchnią, ale to nie bardzo przeszkadza. $(n - 1)$ -forma ω do całkowania po brzegu D może zostać zapisana w następujący sposób:

$$\omega = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n - \omega_2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + (-1)^{n+1} \omega_n dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

Różniczkujemy:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ &\quad (-1)^{n+1} \frac{\partial \omega_n}{\partial x^2} dx^n \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \\ &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\ &\quad \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^n = \\ &= \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

Oznaczamy teraz ι orientację kanoniczną \mathbb{R}^n i całkujemy:

$$\begin{aligned} \int_{D, \iota} d\omega &= \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} dx^2 \dots \text{bez } i \dots \int_{a_n}^{b_n} dx^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} dx^2 \dots \text{bez } i \dots \int_{a_n}^{b_n} dx^n \left(\omega_i(x^1, \dots, b_i, \dots, x^n) - \omega_i(x^1, \dots, a_i, \dots, x^n) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n - \sum_{i=1}^n \int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = \end{aligned}$$

W powyższym wzorze $\{x^i = b^i\}$ oznacza ścianę kostki daną równaniem $x^i = b^i$. Rozważmy więc parę ścian z ustaloną i -tą współrzędną. Forma ω obcięta do ściany $\{x^i = b^i\}$, jest równa

$$\omega|_{\{x^i=b^i\}} = (-1)^{i+1} \omega_i(x^1, \dots, b^i, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k$$

a do ściany $\{x^i = a^i\}$

$$\omega|_{\{x^i=a^i\}} = (-1)^{i+1} \omega_i(x^1, \dots, a^i, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k$$

Orientacja ściany $\{x^i = b_i\}$ indukowana przez orientację kanoniczną \mathbb{R}^n jest to orientacja zgodna z

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \quad (19)$$

jeśli i jest nieparzyste a przeciwna gdy i parzyste. Odwrotnie jest na ścianie $\{x^i = b_i\}$: orientacja indukowana jest zgodna z (19) jeśli i parzyste i przeciwna jeśli i nieparzyste. Można więc napisać, że

$$\int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^{i+1} \int_{\{x^i=b^i\}, \partial_i} (\omega_i) dx^1 \wedge \dots \text{bez } i \dots \wedge dx^n$$

i

$$\int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^i \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial_i)} (\omega_i) dx^1 \wedge \dots \text{bez } i \dots \wedge dx^n$$

i dalej

$$\int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^{i+1} \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial_i)} (-1)^{i+1} \omega = \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial_i)} \omega,$$

$$\int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^i \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial_i)} (-1)^{i+1} \omega = - \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial_i)} \omega.$$

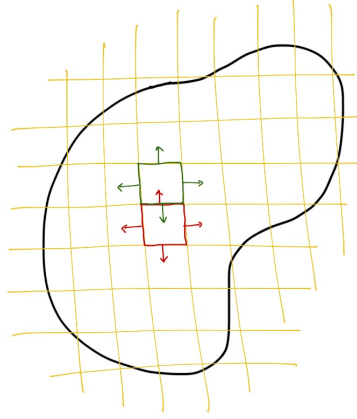
Możemy zatem kontynuować pierwotny rachunek

$$= \sum_{i=1}^n \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial_i)} \omega + \sum_{i=1}^n \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial_i)} \omega = \int_{(\partial D, \partial_i)} \omega.$$

Twierdzenie Stokes'a na kostce zostało zatem udowodnione. Nieco machając rękami możemy dalej argumentować następująco: Obszary w \mathbb{R}^n bardziej skomplikowane niż kostki możemy zawsze na kostki podzielić. Całkowanie po wewnętrznych kostkach, które mają przylegające do nich inne kostki nie da wkładu, gdyż wkład od każdej ze ścian zostanie równoważony przez wkład od ściany sąsiedniej kostki z przeciwną orientacją. Niezerowe zostaną jedynie wkłady z brzegów do których nic nie przylega (Rys 19). Żeby jednak nie opierać się jedynie na machaniu rękami przedstawiamy dowód Twierdzenia Stokes'a dla dowolnej zwartej powierzchni z brzegiem. Konieczne będzie użycie rozkładu jedności.

Dowód: Niech M będzie jak w założeniach twierdzenia. Weźmy skończony atlas $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ na M zgodny z orientacją. Zbiór indeksów I może być skończony, gdyż rozmaitość M jest zwarta. $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ oznaczać będzie odpowiedni atlas na ∂M . Korzystać będziemy także ze związanego z pokryciem $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ rozkładu jedności $(\alpha_i)_{i \in I}$. Zauważmy najpierw, że

$$d\omega = d(1 \cdot \omega) = d\left(\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right)\omega\right) = \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega).$$



Rys. 19: Twierdzenie Stokes'a

Z drugiej jednak strony

$$d\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right)\omega = d\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) \wedge \omega + \left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right)d\omega = 0 + \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega).$$

Podsumowując, skoro zachodzi równość form

$$d\omega = \sum_{i \in I} d(\alpha_i\omega) = \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega),$$

to zachodzi także równość całek

$$I = \int_{(M, \nu)} d\omega = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} d(\alpha_i\omega) = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega).$$

Zajmiemy się środkowym wyrażeniem

$$I = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} d(\alpha_i\omega) = \sum_{i \in I} \int_{(M, \nu)} d(\alpha_i\omega).$$

Każda z form $\alpha_i\omega$ ma nośnik w \mathcal{O}_i , podobnie $d(\alpha_i\omega)$, całkę można więc zapisać w i -tym układzie współrzędnych.

$$I = \sum_{i \in I} \int_{(\mathcal{O}_i, \nu)} d(\alpha_i\omega).$$

$\alpha_i\omega$ jest $(n-1)$ -formą, więc ma postać

$$\alpha_i\omega = \sum_{k=1}^n f_i(x_i^1, \dots, x_i^n) dx_i^1 \wedge \dots \wedge \text{(bez } k) \dots \wedge dx_i^n.$$

$$d(\alpha_i\omega) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n$$

Z definicji całki z formy otrzymujemy

$$\int_{(\mathcal{O}_i, \nu)} d(\alpha_i\omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \dots dx_i^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \dots dx_i^n =$$

Korzystamy z twierdzenia Fubiniiego

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\mathcal{D}_i} dx_i^1 \dots (\text{bez } k) \dots dx_i^n \int_{a^k(x)}^{b^k(x)} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx^k =$$

Obszar \mathcal{D}_i oraz granice całkowania $a^k(x)$, $b^k(x)$ są dobrane jak w twierdzeniu Fubiniiego, a zależność od x wskazuje na zależność granic od punktu w \mathcal{D}_i .

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\mathcal{D}_i} dx_i^1 \dots (\text{bez } k) \dots dx_i^n \left(f_i(x^1, \dots, b^k(x), \dots, x^n) - f_i(x^1, \dots, a^k(x), \dots, x^n) \right)$$

Jeśli $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$ jest otwarty w \mathbb{R}^n , wtedy wartości funkcji f_i w punktach granicznych są równe zero, gdyż nośnik f_i zawiera się w $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$. Do całki wkład dają więc tylko te układy współrzędnych, które są brzegowe, tzn. $\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap E \neq \emptyset$. Taki układ współrzędnych ma szczególną postać, tzn. wyróżniona jest w nim pierwsza współrzędna. Wkład do całki daje jedynie składnik z $k = 1$, gdyż w pozostałych punktach granicznych f_i także jest zero. Dla $k = 1$ granica górna całkowania $b^1(x) = 0$. W granicy dolnej także funkcja f_i znika. Całka taka ma postać

$$\int_{\mathcal{O}_{i,n}} d(\alpha_i \omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap E} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n = \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n.$$

Zgodnie z definicją całki na rozmaitości

$$\sum_{i \in I} \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n = \int_{(\partial M, \partial i)} \omega,$$

gdyż $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)$ stanowi atlas na ∂M zgodny z orientacją a obcięcie (α_i) do brzegu jest rozkładem jedności na brzegu. \square

8.5 Klasyczne wersje Twierdzenia Stokes'a

W tej części zajmujemy się interpretacją poniższych wzorów analizy wektorowej w języku Twierdzenia Stokes'a.

$$\int_S (\vec{n} | \text{rot } X) d\sigma = \int_{\partial S} (\vec{t} | X) d\ell \quad (20)$$

$$\int_D \text{div } X dv = \int_{\partial D} (\vec{n} | X) d\sigma. \quad (21)$$

Dyskutować będziemy obiekty, które zdefiniować można na rozmaitości M wyposażonej w strukturę metryczną g , tzn. na przestrzeni stycznej w każdym punkcie dany jest iloczyn skalarny, czyli forma dwuliniowa, niezdegenerowana, symetryczna i dodatnio określona.

Przypomnijmy sobie kilka faktów algebraicznych. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończenie-wymiarową a g iloczynem skalarnym określonym na tej przestrzeni. Iloczyn skalarny definiuje odwzorowanie

$$G : V \rightarrow V^*, \quad G(v) = g(v, \cdot).$$

Fakt, że iloczyn skalarny jest symetryczny powoduje, że odwzorowanie G jest samosprężone. Fakt, że iloczyn skalarny jest niezdegenerowany powoduje, że G jest izomorfizmem liniowym.

Dodatkowym obiektem związanym z iloczynem skalarnym jest forma kwadratowa \tilde{g} , która służy do definiowania długości wektora:

$$\tilde{g}(v) = g(v, v), \quad \|v\| = \sqrt{\tilde{g}(v)}.$$

My pracować będziemy głównie z g i G . Jeśli w V wybierzemy bazę $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ iloczyn skalarny oraz odpowiedni samosprzężony izomorfizm przedstawić możemy przy pomocy macierzy. Macierz formy g w bazie e oznaczamy zazwyczaj $[g]_e$. Dla wygody będziemy także używać oznaczenia \mathcal{G}_e . Będziemy także pomijać symbol bazy, jeśli będzie jasne jakiej bazy używamy. Wyrazy macierzowe \mathcal{G}_{ij} mają postać

$$\mathcal{G}_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Zwróćmy uwagę na położenie indeksów, które, jakkolwiek *historyczne*, ma jednak uzasadnienie. Tradycyjnie indeksy przy współrzędnych wektora piszemy na górze oraz sumujemy po powtarzających się indeksach górnym i dolnym. W tej sytuacji, jeśli $v = v^i e_i$ oraz $w = w^j e_j$ to

$$g(v, w) = \mathcal{G}_{ij} v^i w^j$$

albo

$$g(v, w) = ([v]^e)^T \mathcal{G}_e [w]^e.$$

Jeśli $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ oznacza bazę dualną do e to

$$G(v) = \mathcal{G}_{ij} v^i \varepsilon^j \in V^*.$$

Zapisać też można

$$g = \mathcal{G}_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j.$$

Zamiana bazy w macierzy formy dwuliniowej odbywa się według wzoru

$$\mathcal{G}_f = Q^T \mathcal{G}_e Q,$$

gdzie Q jest macierzą odwzorowania identycznościowego na V zapisanego w bazach f i e , dokładniej

$$Q = [id_V]^e_f.$$

Zamieniając bazę w macierzy odwzorowania używamy macierzy przejścia wzajemnie odwrotnych. Tu obkładamy wyjściową macierz macierzą przejścia i do niej transponowaną. Odzwierciedla to charakter macierzy \mathcal{G} . Jest to oczywiście także kwadratowa tabelka liczb, ale funkcjonująca inaczej niż zwykła macierz odwzorowania.

Tensor metryczny na rozmaitości zadaje powyżej opisaną strukturę punkt po punkcie na przestrzeniach stycznych i kostycznych. Mamy więc iloczyn skalarny g na każdej z przestrzeni stycznych, możemy liczyć długości wektorów stycznych oraz dysponujemy izomorfizmem samosprzężonym

$$G : TM \longrightarrow T^*M.$$

Izomorfizm ten pozwala utożsamiać wektory z kowektorami, co jest wykorzystywane w teoriach fizycznych, choć zazwyczaj pomijane milczeniem jako oczywiste. Mając do dyspozycji lokalny

układ współrzędnych (\mathcal{O}, φ) , $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ mamy także w każdym punkcie bazę przestrzeni stycznej i przestrzeni kostycznej. Możemy zatem używać macierzy związanej z tensorem metrycznym. Wyrazy macierzowe \mathcal{G}_{ij} są teraz nie liczbami a funkcjami gładkimi na M . Załóżmy teraz, że rozmaitość M jest orientowalna oraz że wybrano na niej orientację ι . Orientowalność wiąże się z istnieniem nieznikających n -form nazywanych formami objętości. Istnienie tensora metrycznego i wybranej orientacji pozwala zdefiniować w kanoniczny sposób formę objętości związaną z metryką. Jeśli układ współrzędnych jest zgodny z orientacją, to metryczna forma objętości Ω ma postać

$$\Omega = \sqrt{\det \mathcal{G}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Struktura metryczna i orientacja pozwala utożsamiać pola wektorowe i jednoformy oraz pola wektorowe i $n - 1$ formy. Jeśli X jest polem wektorowym na M , to $G \circ X$ jest jednoformą a $i_X \Omega$ jest $(n - 1)$ -formą.

Gradient: Gradient jest polem wektorowym odpowiadającym różniczce funkcji. Jeśli f jest funkcją gładką na M

$$\text{grad } f = G^{-1} \circ df.$$

Definicja ta jest niezależna od współrzędnych. Pozwala jednak w łatwy sposób zapisywać gradient w dowolnych współrzędnych bez uciążliwego zamieniania zmiennych w operatorach różniczkowych. Prawidłowa definicja gradientu pozwala także odpowiedzieć na pytanie, *czy dane pole wektorowe X jest gradientem funkcji, tzn. czy ma potencjał skalarny*. Pole mające potencjał skalarny odpowiada jednoformie, która jest różniczką, zatem jej różniczka musi być zero. Warunkiem koniecznym potencjalności pola jest więc, aby

$$d(G \circ X) = 0.$$

Istnienie bądź nieistnienie potencjału zależy już dalej od kształtu obszaru, jak w Lemacie Poincarè.

Rotacja: Na trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości z metryką zdefiniować można rotację pola wektorowego (rot A) następującym wzorem

$$d(G \circ A) = \iota_{\text{rot } A} \Omega.$$

Sprawdźmy, że na \mathbb{R}^3 z kanonicznym iloczynem skalarnym i kanoniczną orientacją otrzymamy znane nam już wzory na rotację pola wektorowego w kartezjańskim układzie współrzędnych. Niech

$$A = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Korzystając z faktu, że kanoniczne współrzędne w \mathbb{R}^3 są ortonormalne otrzymujemy

$$G \circ A = A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(G \circ A) &= \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial A_z}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \end{aligned}$$

Oznaczmy teraz $B = \text{rot } A$. Forma objętości w kanonicznych współrzędnych to $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Mamy zatem

$$\iota_B \Omega = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

i z porównania obu wzorów otrzymujemy

$$\text{rot } A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

co zgadza się z tradycyjnym wzorem na rotację. Zaletą naszej definicji jest, że możemy teraz zapisać rotację w dowolnym układzie współrzędnych nie dokonując uciążliwej zamiany zmiennych.

Fakt 12

$$\text{rot grad } f = 0.$$

Dowód:

$$\iota_{\text{rot grad } f} \Omega = d(G \circ \text{grad } f) = d(G \circ G^{-1} \circ df) = dd f = 0.$$

Zwężenie w formą objętości jest równe zero jedynie dla pola zerowego, zatem istotnie

$$\text{rot grad } f = 0. \quad \square$$

Powyższy fakt wskazuje, że jedną z metod sprawdzania potencjalności pola jest obliczenie jego rotacji. Fakt, iż rotacja gradientu znika, wynika ze znikania drugiej różniczki.

Dywergencja: Na metrycznej orientowalnej rozmaitości dowolnego wymiaru zdefiniować można dywergencję pola wektorowego wzorem

$$(\text{div } X)\Omega = d(\iota_X \Omega).$$

Dywergencja nie zależy od orientacji względem której wybrana jest forma objętości Ω , gdyż pojawia się ona po obydwu stronach równania. Ewentualna zmiana znaku odbywa się jednocześnie po obu stronach równania. W kartezjańskim układzie współrzędnych łatwo jest wypisać dywergencję:

$$\begin{aligned} d(\iota_X \Omega) &= d(X_x dy \wedge dz + X_y dz \wedge dx + X_z dx \wedge dy) = \\ &= \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

Zatem

$$\text{div } X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Także i w tym przypadku bardzo łatwo jest wypisać dywergencję w innym układzie współrzędnych korzystając z definicji a nie z procedury zamiany zmiennych.

Fakt 13

$$\text{div rot } X = 0$$

Dowód:

$$(\operatorname{div} \operatorname{rot} X)\Omega = \mathbf{d}(\iota_{\operatorname{rot} X}\Omega) = \mathbf{d}(\mathbf{d}G \circ X) = 0$$

□

Analizując wzory używać (20, 21) powinniśmy raczej pojęcia gęstości, która odpowiada tradycyjnemu „elementowi objętości” dv , „elementowi powierzchni” $d\sigma$ czy „elementowi długości” $d\ell$. Nie dyskutowaliśmy jednak form nieparzystych oraz gęstości, dlatego posłużymy się dotychczas wprowadzonym językiem. Na potrzeby wzoru (20) założyć trzeba, że S jest dwuwymiarową zwartą powierzchnią z brzegiem zanurzoną w trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości M z metryką. Na potrzeby wzoru (21) założyć należy, że D jest n -wymiarową zwartą rozmaitością z brzegiem zanurzoną w n -wymiarowej zorientowanej rozmaitości M . Zajmiemy się najpierw wzorem (21). W naszym języku „element objętości” to forma objętości zgodna z orientacją i związana z metryką, zatem napisać możemy

$$\int_D \operatorname{div} X \, dv = \int_{(D, \iota)} (\operatorname{div} X)\Omega =$$

i dalej idzie samo

$$= \int_{(D, \iota)} \mathbf{d}(\iota_X \Omega) = \int_{(\partial D, \partial \iota)} \iota_X \Omega =$$

Korzystając z układów współrzędnych typu opisanego w definicji rozmaitości z brzegiem oraz ze stosownego rozkładu jedności napisać można ciąg dalszy rachunku w postaci

$$= \sum_{i \in I} \int_{(\tilde{\mathcal{O}}_i, +)} X_i^1 \sqrt{\det \mathcal{G}_i} \, dx_i^2 \wedge \cdots \wedge dx_i^n.$$

W powyższym wzorze całkujemy po dziedzinie układu współrzędnych $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2, \dots, x_i^n)$ na brzegu z orientacją zgodną z kolejnością współrzędnych (x^2, \dots, x^n) . X_i^1 jest pierwszą współrzędną pola wektorowego w układzie współrzędnych $\varphi = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$ zaś \mathcal{G}_i to macierz iloczynu skalarnego wyrażona w bazie związanej z układem współrzędnych. Po prawej stronie równości (2) $d\sigma$ odpowiada formie objętości na brzegu zapisanej dla metryki g obciętej do brzegu. W układzie współrzędnych $\tilde{\varphi}$ forma ta ma postać $\sqrt{\det \mathcal{S}_i} \, dx_i^2 \wedge \cdots \wedge dx_i^n$. Macierz \mathcal{S}_i jest podmacierzą macierzy \mathcal{G}_i odpowiadającą współrzędnym od 2 wzwyż, tzn

$$\mathcal{G}_i = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{12} & & & \\ \vdots & & \mathcal{S}_i & \\ \mathcal{G}_{1n} & & & \end{array} \right]$$

Poszukajmy teraz wektora normalnego do powierzchni ∂D skierowanego „na zewnątrz”. Niech $\vec{n} = \alpha^i \partial_i$. Pomijając będziemy indeks numerujący układy współrzędnych. Warunek „skierowania na zewnątrz” oznacza, że $\alpha^1 > 0$. Wektor \vec{n} ma być prostopadły do ∂_j dla $j > 1$, czyli

$$0 = g(\vec{n}, \partial_j) = \mathcal{G}_{ik} \alpha^i \delta_j^k = \mathcal{G}_{ij} \alpha^i \quad j > 1. \quad (22)$$

Jednocześnie wektor \vec{n} ma być długości 1, czyli

$$1 = g(\vec{n}, \vec{n}) = \mathcal{G}_{ij} \alpha^i \alpha^j = \sum_j \left(\sum_i \mathcal{G}_{ij} \alpha^i \alpha^j \right) = \sum_i \mathcal{G}_{i1} \alpha^i \alpha^1. \quad (23)$$

Wyrażenia (22) i (23) można razem zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \cdots & \mathcal{G}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{n1} & \mathcal{G}_{n2} & \cdots & \mathcal{G}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\alpha^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Macierz \mathcal{G} jest odwracalna. Wyrazy macierzowe macierzy odwrotnej oznaczamy tradycyjnie \mathcal{G}^{ij} . Używając macierzy odwrotnej rozwiążemy równanie (30).

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \mathcal{G}^{1j} \delta_j^1 / \alpha^1 \implies \alpha^1 = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}. \\ \alpha^j &= \mathcal{G}^{jk} \delta_k^1 / \alpha^1 \implies \alpha^j = \mathcal{G}^{j1} / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}, \quad j > 1 \end{aligned}$$

Obliczmy teraz $g(\vec{n}, X)$

$$g(\vec{n}, X) = \mathcal{G}_{ij} \alpha^i X^j = \mathcal{G}_{i1} \alpha^i X^1 = \mathcal{G}_{i1} \mathcal{G}^{i1} / \sqrt{\mathcal{G}^{11}} X^1 = X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}.$$

Po prawej stronie wzoru (21) we współrzędnych mamy więc

$$\int_{(\vec{0}, +)} (X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}) \sqrt{\det \mathcal{S}} dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (25)$$

Potrzebujemy związek między $\det \mathcal{G}$ a $\det \mathcal{S}$. W tym celu rozważmy przejście od bazy $e = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ do bazy $f = (\vec{n}, \partial_2, \dots, \partial_n)$. Macierz przejścia $[id]_f^e$ ma postać

$$[id]_f^e = \begin{bmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz iloczynu skalarnego w bazie f to

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S} & \\ 0 & & & \end{array} \right],$$

a operacja zmiany bazy daje

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S} & \\ 0 & & & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \mathcal{G} \begin{bmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Liczmy wyznacznik

$$\det \mathcal{S} = (\alpha^1)^2 \det \mathcal{G}$$

i pierwiastek

$$\sqrt{\det \mathcal{S}} = \alpha^1 \sqrt{\det \mathcal{G}}$$

ale $\alpha^1 = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}$, zatem

$$\sqrt{\det \mathcal{S}} = \sqrt{\mathcal{G}^{11}} \sqrt{\det \mathcal{G}}$$

Po podstawieniu powyższego związku do (25) prawa strona (21) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \int_{(\tilde{\mathcal{O}}, +)} (X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}) \sqrt{\det \mathcal{S}} dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\ \int_{(\tilde{\mathcal{O}}, +)} (X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}) \sqrt{\mathcal{G}^{11}} \sqrt{\det \mathcal{G}} dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\ \int_{(\tilde{\mathcal{O}}, +)} X^1 \sqrt{\det \mathcal{G}} dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}$$

i jest równa lewej stronie.

Zajmiemy się teraz wzorem (20). Analizując (21) ustaliliśmy, że całka

$$\int_{\partial D} (\vec{n}|X) d\sigma = \int_{\partial D} \iota_X \Omega.$$

Skorzystamy z tego przekształcając lewą stronę (20):

$$\int_S (\vec{n}|\text{rot } X) d\sigma = \int_S \iota_{\text{rot } X} \Omega = \int_S d(G \circ X) = \int_{\partial S} G \circ X. \quad (26)$$

Zapiszmy teraz formę pod całką w układzie współrzędnych

$$G \circ X = \mathcal{G}_{ij} X^i dx^j$$

Jeśli

$$I \ni r \mapsto (x^1(r), x^2(r), x^3(r)) \in \partial S$$

jest parametryzacją brzegu ∂S to

$$\int_{\partial S} G \circ X = \int_I \mathcal{G}_{ij}(r) X^i(r) \dot{x}^j dr$$

Jednostkowy wektor styczny to

$$\vec{t} = \frac{1}{\|\partial r\|} \partial_r$$

natomiast

$$\partial_r = \dot{x}^1 \partial_1 + \dot{x}^2 \partial_2 + \dot{x}^3 \partial_3.$$

Iloczyn skalarny pod całką można zapisać jako

$$\mathcal{G}_{ij} X^i \dot{x}^j = g(X, \partial r) = g(X, \vec{t}) \|\partial r\|.$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę, że

$$d\ell = \|\partial r\| dr$$

rachunek (26) można kontynuować

$$\int_{\partial S} G \circ X = \int_I \mathcal{G}_{ij} X^i \dot{x}^j dr = \int_I (X|\vec{t}) \|\partial r\| dr = \int_{\partial S} (X|\vec{t}) d\ell.$$

□

8.6 Wieloformy, wielowektory, Gwiazdka Hodge'a

Materiał zawarty w tym podrozdziale omówiony zostanie na ćwiczeniach.

W bardzo podobny sposób do tego, w jaki definiowaliśmy wieloformy na przestrzeni wektorowej, zdefiniować można wielowektory. Skorzystamy tu z prawdziwego dla skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych faktu iż $(V^*)^*$ jest kanonicznie izomorficzna z V . Możemy zamienić rolami V i V^* traktując V jako zbiór funkcji liniowych na V^* i rozważać także zbiór funkcji wieloliniowych antysymetrycznych na V^* , czyli $\Lambda^k V$. Swoją odpowiednik wektorowy ma też konstrukcja iloczynu zewnętrznego. W języku tensorowym mamy

$$v \wedge w = w \otimes v - v \otimes w$$

oraz

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Ponieważ $(V \otimes V)^* \simeq V^* \otimes V^*$ możemy obliczyć $\alpha \wedge \beta$ na $v \wedge w$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \wedge \beta, v \wedge w \rangle &= \langle \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha, v \otimes w - w \otimes v \rangle = \\ &= \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) - \beta(v)\alpha(w) + \beta(w)\alpha(v) = 2[\alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)] \end{aligned}$$

i ogólnie

$$\langle \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle = k! \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}).$$

Oznacza to, że jeśli e i ϵ są parą baz dualnych w V i V^* to układy $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, $\epsilon^{j_1} \wedge \epsilon^{j_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{j_k}$ dla $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ nie są parą baz dualnych. Gdzieś trzeba podzielić przez $k!$. Mając iloczyn skalarny g na V możemy utożsamiać wektory z kowektorami przy pomocy izomorfizmu G . Iloczyn skalarny możemy wprowadzić także na V^* :

$$g(v, w) = (v|w) = \langle G(v), w \rangle = \mathcal{G}_{ij} v^i v^j \quad \tilde{g}(\alpha, \beta) = (\alpha|\beta) = \langle \alpha, G^{-1}(\beta) \rangle = \mathcal{G}^{ij} \alpha_i \beta_j$$

Zgodnie z konwencją, \mathcal{G}^{ij} to wyrazy macierzowe macierzy odwrotnej do \mathcal{G} . Izomorfizmy G i G^{-1} możemy rozszerzyć na dowolne iloczyny tensorowe. Na przykład jeśli $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes V^*$ to $G^{-1}(\alpha \otimes \beta) = G^{-1}(\alpha) \otimes G^{-1}(\beta) \in V \otimes V$. Zakładając, że rozszerzenie jest liniowe otrzymujemy

$$G^{-1}(\alpha_{i_1 i_2} \cdots i_k \epsilon^{i_1} \otimes \epsilon^{i_2} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}) = \alpha_{i_1 i_2} \mathcal{G}^{i_1 j_1} \mathcal{G}^{i_2 j_2} \cdots \mathcal{G}^{i_k j_k} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}.$$

Korzystając z rozszerzenia G i G^{-1} definiujemy iloczyn skalarny na przestrzeni k -form $\Lambda^k V^*$ wzorem

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k | \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^k) = \frac{1}{k!} \langle G^{-1}(\alpha^1) \wedge G^{-1}(\alpha^2) \wedge \cdots \wedge G^{-1}(\alpha^k), \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^k \rangle,$$

na dowolne wieloformy (niekoniecznie proste) rozszerzamy poprzez warunek liniowości.

Gwiazdka Hodge'a: Na rozmaitości M z metryką g mamy iloczyn skalarny na każdej przestrzeni stycznnej, zatem wszystko o czym była mowa prawdziwe jest punkt po punkcie. Jeśli

dotatkowo rozmaitość jest zorientowana i w związku z tym wyposażona w kanoniczną formę objętości zdefiniować można przydatne odwzorowanie

$$* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

wzorem

$$*\alpha = \frac{1}{k!} \iota_{G^{-1}(\alpha)} \Omega.$$

Mamy tu do czynienia z pewną kolizją oznaczeń: Ω^k oznacza zbiór k -form na M i jednocześnie Ω jest formą objętości. Myślę jednak, że damy radę odróżniać o którą „omegę” kiedy chodzi. Sprawdźmy najpierw jak nasza definicja działa w praktyce. Zaczniemy od najprostszego przypadku: $M = \mathbb{R}^3$, orientacja kanoniczna, iloczyn skalarny kanoniczny, $\mathcal{G} = \mathbf{1}$, $\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

$$*dx^1 = \iota_{G^{-1}(dx^1)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^2 \wedge dx^3$$

$$*dx^2 = \iota_{G^{-1}(dx^2)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^1 \wedge dx^3$$

$$*dx^3 = \iota_{G^{-1}(dx^3)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^1 \wedge dx^2$$

$$*(dx^1 \wedge dx^2) = \frac{1}{2} \iota_{G^{-1}(dx^1 \wedge dx^2)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iota_{\partial_1 \wedge \partial_2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx^3$$

Popatrzmy teraz na rachunki w układzie sferycznym:

$$\Omega = r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}.$$

$$*dr = \iota_{\partial_r} \Omega = r^2 \sin \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi$$

$$*d\vartheta = \iota_{\frac{1}{r^2} \partial_r} \Omega = \frac{1}{r^2} \iota_{\partial_r} \Omega = -\sin \vartheta dr \wedge d\varphi$$

$$*d\varphi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \iota_{\partial_\varphi} \Omega = \frac{1}{\sin \vartheta} dr \wedge d\vartheta$$

$$*dr \wedge d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \iota_{\partial_r \wedge \partial_\vartheta} \Omega = \sin \vartheta d\varphi$$

Zauważmy, że

$$**dx^1 = *dx^2 \wedge dx^3 = dx^1, \quad **dr \wedge d\varphi = * \left(-\frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \right) = dr \wedge d\varphi$$

Z drugiej strony na \mathbb{R}^2

$$*dx^1 = dx^2, \quad *dx^2 = -dx^1, \quad **dx^1 = *dx^2 = -dx^1.$$

Wydaje się więc, że złożenie $**$ jest równe identyczności z dokładnością do znaku. Znak ten musi mieć coś wspólnego z rzędem formy i wymiarem przestrzeni.

Fakt 14 *Zachodzą następujące równości*

1. $*1 = \Omega$

$$2. * \Omega = 1$$

$$3. ** \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha, \quad \alpha \in \Omega^k(M)$$

$$4. \alpha \wedge * \beta = (\alpha | \beta) \Omega \quad \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

Dowód: Zauważmy, że $*$ jest operacją punktową, zatem można wybrać wygodny układ współrzędnych. W tym przypadku jest to taki układ współrzędnych, dla którego w ustalonym punkcie baza $(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ jest ortonormalna. Pracować będziemy w takim układzie współrzędnych. Wtedy $G^{-1}(dx^i) = \partial_i$. Zaczynamy od dowodu punktu (3). Każda k -forma jest kombinacją liniową form bazowych $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ z funkcyjnymi współczynnikami. $*$ jest liniowa nad funkcjami, więc można sprawdzić tylko na formach bazowych. Załóżmy, że $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

$$* dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \frac{1}{k!} \iota_{\partial_{i_1} \wedge \partial_{i_2} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \text{sgn } \sigma dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n},$$

gdzie $i_{k+1} < i_{k+2} < \dots < i_n$ oraz σ jest permutacją

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Aplikujemy $*$ drugi raz

$$* * dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = * \text{sgn } \sigma dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \text{sgn } \sigma \text{sgn } \rho dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Permutacja ρ ma postać

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k & n-k+1 & \dots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \dots & i_n & i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix}.$$

Pozostaje do obliczenia $\text{sgn } \sigma \text{sgn } \rho$: Pamiętając, że znak jest homomorfizmem grupy permutacji w grupę $\{-1, 1\}$ z mnożeniem zauważamy, że

$$\text{sgn } \sigma \text{sgn } \rho = \text{sgn } \rho \text{sgn } \sigma = \text{sgn } \rho \text{sgn } \sigma^{-1} = \text{sgn } (\rho \circ \sigma^{-1})$$

Ostatnie złożenie jest permutacją

$$\rho \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{k-n} & i_{k-n+1} & \dots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \dots & i_n & i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix},$$

której znak jest równy $(-1)^{k(n-k)}$. Dla dowodu punktu (2) zauważmy, że $G^{-1}(\Omega) = \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \dots \wedge \partial_n$, dalej

$$* \Omega = \frac{1}{n!} \iota(\partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \dots \wedge \partial_n) \Omega = \frac{1}{n!} n! = 1$$

Punkt (1) wynika z (3) i (2), a właściwie jest jedyną sensowną definicją gwiazdki zero-formy, która pasuje do pozostałych wzorów. W punkcie (4) zauważmy, że obie strony są dwuliniowe, można więc sprawdzać na formach bazowych. Niech więc $\alpha = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ i $\beta = dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$. Forma $*\beta$ jest, z dokładnością do znaku, iloczynem zewnętrznym różniczek

$dx^{j_{k+1}} \wedge dx^{j_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}$, gdzie $\{j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. W tej sytuacji $\alpha \wedge * \beta$ jest różna od zera jedynie gdy $\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$. Jeśli dodatkowo założymy naturalne uporządkowanie indeksów oznacza to, że $i_l = j_l$ dla $l = 1, \dots, k$ and $\alpha = \beta$. Podobnie $(\alpha | \beta)$ jest różna od zera jedynie gdy $\alpha = \beta$, gdyż

$$(\alpha | \beta) = \frac{1}{k!} \iota_{\partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$$

Ostatecznie, gdy $\alpha = \beta$ prawa strona to

$$(\alpha | \alpha) \Omega = \Omega$$

a lewa

$$\alpha \wedge * \alpha = \text{sgn } \sigma dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = (\text{sgn } \sigma)^2 \Omega.$$

Dla porządku zapiszmy, że σ jet permutacją

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

□

9 Różniczkowanie pól i form

9.1 Pochodna Liego

Zanim przejdziemy do właściwej części wykładu wypada wspomnieć osobę, kora użyczyła nazwiska badanemu dziś przez nas pojęciu. Marius Sophus Lie (17.12.1842 - 18.02.1899) był matematykiem norweskim. Jego badania i osiągnięcia stanowią podstawę dzisiejszej geometrii różniczkowej. Sophus Lie zajmował się między innymi badaniem równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych. Studiowanie struktury, a zwłaszcza symetrii równań różniczkowych dało początek między innymi teorii grup i algebr Liego.

W geometrii różniczkowej interesuje nas często jak dane pole tensorowe zmienia się od punktu do punktu na rozmaitości. A właściwie częściej chodzi o to, czy są jakieś kierunki w których się nie zmienia. Tu jednak napotykamy na pierwszą pojęciową trudność: zazwyczaj nie wiadomo jak porównywać rozmaite pola (pola wektorowe, formy różniczkowe...) między punktami na rozmaitości. Możemy porównywać wartości funkcji w różnych punktach, ale nie możemy porównywać wartości pola wektorowego w różnych punktach. Wiadomo co to znaczy „funkcja f jest stała na M ”, ale nie wiadomo co to jest stałe pole wektorowe. Na przykład na sferze dwuwymiarowej we współrzędnych (ϑ, φ) pole wektorowe $X = \partial_\varphi$ bylibyśmy być może skłonni uznać za stałe, ale to samo pole wektorowe we współrzędnych stereograficznych wygląda już zupełnie inaczej $\partial_\varphi = -x\partial_y + y\partial_x$ i pomysł z nazwaniem go stałym polem wydaje się cokolwiek dziwny. Różnica polega na tym, że wiązka $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, której cięciem jest funkcja jest trywialna i wartości funkcji w różnych punktach należą do tej samej przestrzeni. Wiązka, której cięciem jest pole wektorowe $\tau_M : TM \rightarrow M$ już trywialna nie jest: wartości w różnych punktach należą do różnych przestrzeni stycznych. Przestrzenie te są co prawda izomorficzne, ale nie



Rys. 20: Marius Sophus Lie

kanonicznie. Żeby porównywać wartości pola wektorowego w różnych punktach potrzebujemy albo dodatkowej struktury (która nazywa się, zgodnie z tym do czego służy, *powiązaniem* lub z łaciny *koneksją*) albo jakiejś metody na sprowadzanie wartości z otoczenia do jednego punktu. Dzisiaj będziemy mówili raczej o tym drugim sposobie. Do sprowadzania wartości pól wektorowych albo kowektorowych do jednego punktu posłużą nam potok pola wektorowego. Cała więc operacja badania zmienności różnych pól tensorowych, czyli obliczania pochodnych tych pól, odbywać się będzie wzdłuż ustalonego pola wektorowego.

Podstawowym pojęciem potrzebnym do zdefiniowania pochodnej Liego jest *potok pola wektorowego*. Odwzorowanie różniczkowalne $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ nazywamy *grupą dyfeomorfizmów*, jeżeli spełnione są dwa warunki

1. $\forall q \in M \quad \varphi(0, q) = q$,
2. $\forall q \in M, s, t, \in \mathbb{R} \quad \varphi(s + t, q) = \varphi(s, \varphi(t, q))$.

Będziemy używać także oznaczenia φ_t dla odwzorowania $q \mapsto \varphi(t, q)$. Powyższe warunki oznaczają, że $\varphi_0 = \text{id}_M$, $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$. Z warunku drugiego wynika, że każde odwzorowanie φ_t jest dyfeomorfizmem, gdyż odwrotne istnieje (jest równe φ_{-t}) i jako odwzorowanie z tej samej rodziny jest różniczkowalne. Grupa dyfeomorfizmów definiuje pole wektorowe na M wzorem

$$X^\varphi(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(t, q).$$

Ze względu na warunek (2) pole to jest niezmiennicze ze względu na φ_t . Istotnie, wektor $\mathbb{T}\varphi_t(X(q))$ jest wektorem stycznym do krzywej $s \mapsto \varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_{t+s}(q) = \varphi_s(\varphi_t(q)) = X(\varphi_t(q))$. W kontekście całkowania pól wektorowych mówimy zazwyczaj o *lokalnej grupie dyfeomorfizmów*. Jest to odwzorowanie $\varphi : \Omega \rightarrow M$, gdzie Ω jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{R} \times M$ zawierającym podzbiór $\{0\} \times M$. Warunek (1) pozostaje bez zmian, a warunek (2) ma być spełniony jeśli tylko (t, q) , $(s, \varphi(t, q))$ i $(s + t, q)$ są elementami Ω . Oczywiście lokalna grupa dyfeomorfizmów także definiuje pole wektorowe: żeby mieć wektor styczny wystarczy „króciutka” krzywa z parametrem w otoczeniu zera. Okazuje się, że jest też odwrotnie, tzn. każde pole wektorowe definiuje lokalną grupę dyfeomorfizmów:

Twierdzenie 7 Gładkie pole wektorowe X na M definiuje lokalną jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów φ^X taką, że

$$X(q) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi^X(t, q). \quad (27)$$

Dowód: Dowód oparty jest na twierdzeniu Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności wraz z twierdzeniem o zależności rozwiązania od warunków początkowych. W układzie współrzędnych nasze równanie różniczkowe ma postać

$$X^i(x^j(t)) = \frac{dx^i}{dt}$$

Jest to układ równań różniczkowych na \mathbb{R}^n . Z Twierdzenia Cauchy'ego wynika zatem istnienie krzywej całkowej $t \mapsto \varphi_t(q)$ określonej na pewnym otoczeniu I zera w \mathbb{R} z warunkiem początkowym $\varphi_0(q) = q$. Z jednoznaczności rozwiązania wynika także, że jeśli tylko wszystkie napisy mają sens to $\varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_{t+s}(q)$. Z twierdzenia o zależności rozwiązania od warunków początkowych wynika, że dla każdego punktu $q \in M$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}_q \subset M$ oraz odcinek zawierający $I_q \subset \mathbb{R}$ zawierający 0 taki, że rozwiązanie z warunkiem początkowym $(s, p) \in I_q \times \mathcal{O}_q$ istnieje dla czasu z odcinka $[s - \epsilon, s + \epsilon]$ oraz ϵ jest niezależny od (s, p) . Oznacza to, że Ω na którym określona jest jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów może być wzięte jako $\Omega = \bigcup_{q \in M} (I_q \times \mathcal{O}_q)$. \square

Niech teraz X będzie polem wektorowym, a φ odpowiadającą mu lokalną grupą dyfeomorfizmów. Dyfeomorfizmy φ_t będą służyły do przenoszenia wartości pól tensorowych z otoczenia punktu $q \in M$ do punktu q . Przyjrzyjmy się sytuacji dla pola kowektorowego czyli dla jednoformy. Niech więc $\alpha \in \Omega^1(M)$ będzie jednoformą. Ustalmy $q \in M$ i rozważmy krzywą

$$t \longmapsto (\varphi_t^* \alpha)(q).$$

Jest to krzywa, której wartości leżą w przestrzeni wektorowej T_q^*M . Wektor styczny do krzywej w przestrzeni wektorowej może być identyfikowany z elementem tej samej przestrzeni. Można go także znaleźć korzystając z tradycyjnego wzoru przypominającego „granice ilorazu różnicowego”. Mamy więc definicję

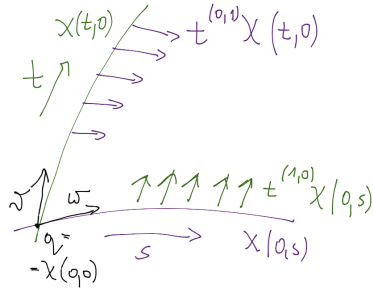
Definicja 25

$$(\mathcal{L}_X \alpha)(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* \alpha)(q) - \alpha(q))$$

Z definicji wynika, że pochodna Liego jest liniowa ze względu na dodawanie form oraz mnożenie form przez liczby. Nie jest jednak liniowa ze względu na mnożenie przez funkcje. Definicja jest niestety mało praktyczna. Spróbujmy znaleźć jakiś wygodny wzór na pochodną Liego jednoformy. Skorzystamy ze wzoru na różniczkę jednoformy zwanego *wzorem Tulczyjewa*. Weźmy dwa wektory $v, w \in T_q M$ i odwzorowanie $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ takie, że $\chi(0, 0) = q$, v jest wektorem stycznym do krzywej $t \mapsto \chi(t, 0)$ i w jest wektorem stycznym do krzywej $s \mapsto \chi(0, s)$. Wartość różniczki formy α na wektorach v i w możemy obliczyć według wzoru

$$d\alpha(v, w) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle \alpha(\chi(t, 0)), \mathbf{t}^{(0,1)} \chi(t, 0) \rangle - \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \langle \alpha(\chi(0, s)), \mathbf{t}^{(1,0)} \chi(0, s) \rangle.$$

W powyższym wzorze wektor $\mathbf{t}^{(0,1)} \chi(t, 0)$ oznacza wektor styczny do krzywej $s \longmapsto \chi(t, s)$ w



Rys. 21: Ilustracja do wzoru Tuczysjewa

$s = 0$, czyli zaczepiony w punkcie $\chi(t, 0)$. Podobnie wektor $\mathbf{t}^{(1,0)}\chi(0, s)$ oznacza wektor styczny do krzywej $t \mapsto \chi(t, s)$ w $t = 0$, czyli zaczepiony w punkcie $\chi(0, s)$. W układzie współrzędnych powyższe rachunki wyglądałyby tak:

$$\alpha = \alpha_i(x)dx^i, \quad v = v^i\partial_i, \quad w = w^i\partial_i, \quad \chi(s, t) = (x^i(q) + v^i t + w^i s),$$

$$\mathbf{t}^{(0,1)}\chi(t, 0) = (x^i(q) + v^i t, w^i), \quad \mathbf{t}^{(1,0)}\chi(0, s) = (x^i(q) + w^i s, v^i),$$

$$d\alpha(v, w) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\alpha_i(x^i(q) + v^i t)w^i) - \frac{d}{ds}|_{s=0} (\alpha_i(x^i(q) + w^i s)v^i) = \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} v^j w^i - \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} w^j v^i.$$

Niezależność wyniku od wyboru odwzorowania χ wynika z symetrii drugich pochodnych cząstkowych. Istotnie, w układzie współrzędnych odwzorowanie χ dane jest przez układ gładkich funkcji dwóch zmiennych $\chi(t, s) = (\chi^i(t, s))$. Wzór Tuczysjewa przyjmuje więc postać

$$\begin{aligned} d\alpha(v, w) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\alpha_i(\chi^j(t, 0)) \frac{\partial\chi^i}{\partial s}(t, 0) \right) - \frac{d}{ds}|_{s=0} \left(\alpha_i(\chi^j(0, s)) \frac{\partial\chi^i}{\partial t}(0, s) \right) = \\ &= \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k}(\chi^j(0, 0)) \frac{\partial\chi^k}{\partial t}(0, 0) \frac{\partial\chi^i}{\partial s}(0, 0) + \alpha_i(\chi^j(0, 0)) \frac{\partial^2\chi^i}{\partial t\partial s}(0, 0) + \\ &= \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k}(\chi^j(0, 0)) \frac{\partial\chi^k}{\partial s}(0, 0) \frac{\partial\chi^i}{\partial t}(0, 0) + \alpha_i(\chi^j(0, 0)) \frac{\partial^2\chi^i}{\partial s\partial t}(0, 0) \end{aligned}$$

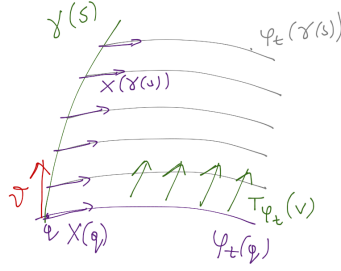
Fragmenty zaznaczone na czerwono upraszczają się, natomiast

$$\chi^i(0, 0) = x^i(q), \quad \frac{\partial\chi^k}{\partial s}(0, 0) = w^k, \quad \frac{\partial\chi^j}{\partial t}(0, 0) = v^j.$$

Wróćmy teraz do pochodnej Liego formy α . Wiadomo, że $\mathcal{L}_X\alpha$ ma być jednoformą – dowiemy się jaka to jest jednoforma, jeśli będziemy wiedzieli jak ona działa na wektor styczny v . Weźmy więc ustalony (ale dowolny) wektor $v \in T_qM$ oraz jakąś krzywą $s \mapsto \gamma(s)$, którą ten wektor reprezentuje. Używając wzoru Tuczysjewa obliczymy $d\alpha(X(q), v)$ przyjmując jako χ odwzorowanie $\chi(t, s) = \varphi_t(\gamma(s))$. W tej sytuacji

$$\mathbf{t}^{(0,1)}\chi(t, 0) = T\varphi_t(v), \quad \mathbf{t}^{(1,0)}\chi(0, s) = X(\gamma(s))$$

Wstawiamy powyższe informacje do wzoru Tuczysjewa



Rys. 22: Odwzorowanie $\chi(t, s) = \varphi_t(\gamma(s))$

$$\begin{aligned} d\alpha(X(q), v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \alpha(\varphi_t(q)), T\varphi_t(v) \rangle - \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \alpha(\gamma(s)), X(\gamma(s)) \rangle = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle (\varphi_t^* \alpha)(q), v \rangle - \langle d(\iota(X)\alpha)(q), v \rangle \end{aligned}$$

Pierwszy ze składników to właśnie wartość $\mathcal{L}_X \alpha$ na wektorze v . Otrzymaliśmy zatem równość

$$d\alpha(X(q), v) = \langle (\mathcal{L}_X \alpha)(q), v \rangle - \langle d(\iota(X)\alpha)(q), v \rangle$$

Biorąc pod uwagę, że punkt q i wektor styczny v były wybrane dowolnie otrzymujemy równość

$$\mathcal{L}_X \alpha = \iota(X)d\alpha + d\iota(X)\alpha.$$

Wróćmy teraz na chwilę do **wzoru Tulczyjewa**. Przypomina on nieco inny wzór (Cartana) na różniczkę formy obliczoną na dwóch polach wektorowych. Dla jednoformy przyjmuje on postać

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) + \alpha([X, Y]).$$

Pierwszy i drugi składnik tego wzoru możemy wyznaczyć posługując się odpowiednio dobranym odwzorowaniem podobnym do χ . Oznaczmy przez φ_t potok pola X , zaś przez ψ_s potok pola Y . Na przykład $X\alpha(Y)$ to

$$X\alpha(Y) = \frac{d}{dt} \langle \alpha(\varphi_t(q)), T\varphi_t(Y(q)) \rangle$$

Wektor $T\varphi_t(Y(q))$ to $t^{(0,1)}\tilde{\chi}(t, 0)$ dla odwzorowania $\tilde{\chi}(t, s) = \varphi_t(\psi_s(q))$. Składnik $Y\alpha(X)$ to

$$Y\alpha(X) = \frac{d}{ds} \langle \alpha(\psi_s(q)), T\psi_s(X(q)) \rangle$$

Wektor $T\psi_s(X(q))$ to $t^{(1,0)}\tilde{\chi}(0, s)$ dla odwzorowania $\tilde{\chi}(t, s) = \psi_s(\varphi_t(q))$. Odwzorowania χ i $\tilde{\chi}$ nie zazwyczaj pokrywają się. Konkretny przykład zobaczą państwo na ćwiczeniach. Miarą braku zgodności jest właśnie $[X, Y]$, który jako poprawka pojawia się w trzeciej części wzoru.

Kolejnym zadaniem będzie znalezienie pochodnej Liego funkcji na rozmaitości f . Definicja formalna jest bardzo podobna jak dla jednoformy:

$$(\mathcal{L}_X f)(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\varphi_t(q)) - f(q))$$

Jest dość oczywiste, że

$$\mathcal{L}_X f = Xf = df(X) = \iota(X)df$$

Sprawdźmy teraz jak pochodna Liego działa na iloczyn $f\alpha$. Iloczyn funkcji i jednoformy to też jednoforma, więc możemy użyć świeżo wyprowadzonego wzoru:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f\alpha) &= \iota(X)d(f\alpha) + d\iota(X)(f\alpha) = \iota(X)(df \wedge \alpha + f d\alpha) + d(f\iota(X)\alpha) = \\ &= (\iota(X)df)\alpha - (\iota(X)\alpha)df + f\iota(X)d\alpha + \iota(X)\alpha df + f d(\iota(X)\alpha) = \\ &= (\mathcal{L}_X f)\alpha + f(\iota(X)d\alpha + d(\iota(X)\alpha)) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy coś w rodzaju reguły Leibniza:

$$\mathcal{L}_X(f\alpha) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha.$$

Pora rozszerzyć pojęcie pochodnej Liego na wieloformy. Formalnie definicja wygląda identycznie.

Definicja 26 Pochodną Liego k -formy ω w kierunku pola X nazywamy k -formę, której wartość w punkcie q dana jest wzorem

$$(\mathcal{L}_X\omega)(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^*\omega)(q) - \omega(q))$$

Zobaczmy jak to działa na iloczynie zewnętrznym:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^*(\alpha \wedge \beta) - \alpha \wedge \beta) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^*\alpha \wedge \varphi_t^*\beta - \varphi_t^*\alpha \wedge \beta + \varphi_t^*\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge \beta) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^*\alpha \wedge (\varphi_t^*\beta - \beta) + (\varphi_t^*\alpha - \alpha) \wedge \beta) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^*\alpha \wedge \left(\frac{\varphi_t^*\beta - \beta}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi_t^*\alpha - \alpha}{t} \right) \wedge \beta = \\ &= (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta) \end{aligned}$$

Tym razem to już nie „coś w rodzaju”, tylko poprostu reguła Leibniza. Wygląda na to, że **pochodna Liego jest różniczkowaniem algebry zewnętrznej form różniczkowych**. Ze względu na przemienność d i pull-backu obowiązuje także wzór

$$\mathcal{L}_X d\omega = d\mathcal{L}_X\omega.$$

Wzór wyprowadzony wcześniej dla jednoform okazuje się obowiązywać także dla wieloform. Rachunek przeprowadzimy na współrzędnych i skorzystamy z liniowości:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= \\ (\mathcal{L}_X f)(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &+ f \sum_{j=1}^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_X dx^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ (Xf)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} &+ f \sum_{j=1}^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota(X)d(fdx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= \iota(X)df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \\ &= (Xf)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + df \wedge \left(\sum_{j=1}^k (-1)^j X^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} d(\iota(X)fdx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= \\ d\left(f \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} X^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) &= \\ df \wedge \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} X^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) + f \sum_{j=1}^k dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dX^{i_j} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned} \quad (30)$$

Dodając (29) i (30) otrzymujemy (28), gdyż wyrazy zaznaczone na zielono upraszczają się. Poodsumujmy własności pochodnej Liego w działaniu na formy różniczkowe:

Fakt 15 1. Pochodna Liego k -formy jest k -formą,

2. Pochodna Liego jest operacją liniową, tzn dla $a, b \in \mathbb{R}$ $\mathcal{L}_X(a\alpha + b\beta) = a\mathcal{L}_X\alpha + b\mathcal{L}_X\beta$,

3. Spełniona jest reguła Leibniza $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$,

4. W działaniu na formy prawdziwy jest wzór $\mathcal{L}_X = \iota(X)d + d\iota(X)$.

Pozostaje sprawdzenie jak pochodna Liego działa na pola wektorowe.

Definicja 27

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q))) - Y(q)).$$

Zgodnie z definicją transportujemy wartość pola Y z punktu $\varphi_t(q)$ do punktu q . Tym razem musimy użyć odwzorowania stycznego $T\varphi_{-t}$. Powstałą krzywą jest krzywą w przestrzeni wektorowej $T_q M$. Wartość pochodnej Liego to wektor styczny do tej krzywej.

Fakt 16

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Dowód:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(q)f) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(\varphi_t(q))f + Y(\varphi_t(q))f - Y(q)f) = \end{aligned}$$

Fragment zaznaczony na czerwono to

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(\varphi_t(q))f - Y(q)f) = X(Yf)$$

Fragment zaznaczony na niebiesko to

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(\varphi_t(q))f) = \lim_{t \rightarrow 0} Y(\varphi_t(q)) \left(\frac{f \circ \varphi_{-t} - f}{t} \right) = -Y(Xf)$$

Ostatecznie

$$\mathcal{L}_X Y f = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f$$

Z dowolności f wynika teza. \square

9.2 Pochodna kowariantna

W poprzednim podrozdziale zajmowaliśmy się różniczkowaniem pól tensorowych wzdłuż pola wektorowego, czyli pochodną Liego \mathcal{L}_X . Wartość pochodnej Liego zależy w sposób bardzo istotny od pola wektorowego wzdłuż którego różniczkujemy. Zależność ta jest poważniejsza niż tylko zależność od wartości pola w danym punkcie q - jest to zależność od tego jakie jest pole w otoczeniu q . Oczywiście pochodna Liego różniczkuje swój argument, to znaczy jeśli argument pomnożymy przez funkcję, wynik będzie zależał od pochodnych tej funkcji: Dla pola wektorowego otrzymamy

$$\mathcal{L}_X(fY) = [X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y = f\mathcal{L}_X Y + (\mathcal{L}_X f)Y \quad (31)$$

a dla formy α

$$\mathcal{L}_X(f\alpha) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X \alpha \quad (32)$$

Wzory (31) i (32) wyrażają *regulę Leibniza* dla pochodnej Liego. Okazuje się, że podobnie jest jeśli pomnożymy przez funkcję pole wzdłuż którego różniczkujemy. Porównajmy \mathcal{L}_X z \mathcal{L}_{fX} dla gładkiej funkcji f . Najpierw pochodna Liego pola wektorowego

$$\mathcal{L}_{fX} Y = [fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X = f\mathcal{L}_X Y - \langle df, Y \rangle X \quad (33)$$

potem pochodna formy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX} \alpha &= \iota(fX)\mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}(\iota(fX)\alpha) = f\iota(X)\mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}(f\iota(X)\alpha) = \\ &= f\iota(X)\mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}f \wedge \iota(X)\alpha + f\mathbf{d}\iota(X)\alpha = f\mathcal{L}_X \alpha + \mathbf{d}f \wedge \iota(X)\alpha \end{aligned} \quad (34)$$

W obu wzorach (33) i (34) pojawia się różniczka funkcji f , co wskazuje na zależność od wartości pola w otoczeniu q , a nie jedynie w punkcie q . My jednak cały czas poszukujemy odpowiednika różniczkowania po współrzędnych, które jest możliwe na \mathbb{R}^n , lub ogólniej, na przestrzeni afinicznej. We współrzędnych (x^a) związanych z punktem q_0 i bazą (e_a) w przestrzeni modelowej V różniczkowanie to wygląda następująco

$$D_v(X) = v^a(\partial_a X^b)e_b, \quad (35)$$

gdzie $v = v^a e_a$ oraz $X = X^b e_b$. Wzór jest poprawny, tzn jest niezmienniczy ze względu zmianę bazy w V i zmianę punktu początkowego a_0 . Wzór (35) jest poprawny dlatego, że wiązka styczna do przestrzeni afinicznej jest trywialna: przestrzeń styczna w każdym punkcie jest kanonicznie izomorficzna z V . Jeszcze inaczej można powiedzieć, że wzór (35) jest poprawny ponieważ wiemy co to znaczy przesuwając wektor styczny wzdłuż krzywej w A . Rozważając powierzchnię $M \subset A$ nie możemy użyć wzoru (35), bo na powierzchni nie mamy wyróżnionej klasy układów współrzędnych. Jeśli zaś użyjemy dowolnych współrzędnych wzór przestanie być niezmienniczy, czyli nie będzie definiował żadnego obiektu geometrycznego. Pole wektorowe $X : M \rightarrow TM$ możemy oczywiście zapisać w bazie (e_a) otrzymując $X = X^a e_a$ (zatem na oko podobnie jak poprzednio), z tą jednak różnicą, że funkcje X^a określone są jedynie w punktach należących do M . Możemy także, korzystając z zanurzenia M w A wyliczyć $D_v X$ jeśli tylko $v \in TM$. Problem w tym, że otrzymany wektor najprawdopodobniej nie jest styczny do M . Z tego da się wybrnąć jeśli w V mamy wyróżniony iloczyn skalarny. (Tak jest oczywiście jeśli $A = \mathbb{R}^n$.)

Iloczyn skalarny pozwala rozłożyć przestrzeń $\mathbb{T}_q A = V$ styczną do A w punkcie q na sumę prostą przestrzeni $\mathbb{T}_q M = W_q$ i W_q^\perp , tzn

$$V = W_q \oplus W_q^\perp \quad (36)$$

Możemy teraz napisać definicję

Definicja 28 Niech M będzie powierzchnią zanurzoną w przestrzeni afinicznej A z wyróżnionym iloczynem skalarnym. *Pochodną kowariantną* pola wektorowego X na M w kierunku wektora stycznego $v \in \mathbb{T}_q M$ nazywamy wektor

$$\nabla_v X = (D_v X)^\parallel, \quad (37)$$

gdzie $(\cdot)^\parallel$ oznacza rzut na W_q związany z rozkładem (36).

W powyższej definicji współrzędne nie są używane, nie ma więc wątpliwości, że (37) definiuje pewien wektor z W_q . Wyrażenie na współrzędnych też będzie nam potrzebne. Wprowadźmy w tym celu w otoczeniu q w M układ współrzędnych (φ^i) , $i = 1 \dots k$. Wektory ∂_i tworzą więc bazę W_q . Potrzebujemy jeszcze $n - k$ wektorów rozpinających W_q^\perp . Oznaczmy je n_α , $\alpha = 1 \dots n - k$. Każdy z wektorów e_a zapisać możemy w bazie złożonej z ∂_i oraz n_α otrzymując

$$e_a = A_a^i \partial_i + A_a^\alpha n_\alpha$$

Macierz A , której pierwsze k wierszy to A_a^i a dalsze $n - k$ wierszy to A_a^α jest macierzą przejścia z bazy (e_a) do bazy (∂_i, n_α) . Wyrazy macierzowe A_a^i i A_a^α są funkcjami na M , można je więc wyrazić jako funkcje współrzędnych (φ^i) . Pole wektorowe X zapisujemy w bazie e_a : $X = X^a(\varphi^i)e_a$, wektor v zapisujemy w bazie (∂_i) i wyznaczamy

$$D_v X = v^i (\partial_i X^a) e_a.$$

Żeby wziąć część styczną do M używamy macierzy A :

$$D_v X = v^i (\partial_i X^a) (A_a^j \partial_j + A_a^\alpha n_\alpha).$$

Widać więc, że

$$\nabla_v X = v^i (\partial_i X^a) A_a^j \partial_j.$$

W powyższym wzorze nie podoba mi się jeszcze to, że pole X cały czas mamy wyrażone w bazie e_a a nie w bazie ∂_i , która jest dla niego naturalniejsza.

$$X^a = (A^{-1})_i^a X^i,$$

zatem

$$\begin{aligned} \nabla_v X = v^i \partial_i ((A^{-1})_k^a X^k) A_a^j \partial_j &= v^i \partial_i ((A^{-1})_k^a) X^k A_a^j \partial_j + v^i (A^{-1})_k^a \partial_i (X^k) A_a^j \partial_j = \\ &= \partial_i (X^j) v^i \partial_j + [\partial_i ((A^{-1})_k^a) A_a^j] v^i X^k \partial_j \quad (38) \end{aligned}$$

Zauważmy, że fragment wzoru zapisany na niebiesko nie zależy wcale od pola X ani od kierunku w którym różniczkujemy. Jest on związany z powierzchnią na której o wszystko się dzieje. Niebieskie funkcje oznaczamy Γ_{ik}^j , tzn

$$\Gamma_{ik}^j = \partial_i ((A^{-1})_k^a) A_a^j \quad (39)$$

i nazywamy *symbolami Christoffela* (Erwin Bruno Christoffel (1829-1900), matematyk niemiecki). Z użyciem symboli Christoffela pochodną kowariantną zapisujemy następująco

$$\nabla_v X = \partial_i(X^j)v^i + \Gamma_{ik}^j v^i X^k. \quad (40)$$

Przykład 18 Policzmy (niektóre) symbole Christoffela na sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mamy $n = 3$, $k = 2$, współrzędne x^a to (x, y, z) , współrzędne (φ^i) to (φ, θ) pochodzące ze sferycznego układu współrzędnych. Baza e_a to $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, baza (∂_i) to $(\partial_\varphi, \partial_\theta)$, jako wektor normalny możemy wziąć ∂_r . Posługując się znanymi wzorami

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

i przyjmując $r = 1$ znajdujemy wyrazy macierzowe macierzy A^{-1}

$$\partial_\varphi = -\sin \varphi \sin \theta \partial_x + \cos \varphi \sin \theta \partial_y$$

$$\partial_\theta = \cos \varphi \cos \theta \partial_x + \sin \varphi \cos \theta \partial_y - \sin \theta \partial_z$$

$$\partial_r = \cos \varphi \sin \theta \partial_x + \sin \varphi \sin \theta \partial_y + \cos \theta \partial_z$$

Macierz A^{-1} ma postać

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

zatem

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Skorzystamy ze wzoru (39) zauważając, że można go zapisać na dwa sposoby:

$$\Gamma_{ik}^j = \partial_i((A^{-1})_k^a)A_a^j = -\partial_i(A_a^j)(A^{-1})_k^a.$$

Przykładowe rachunki:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi &= -\partial_\varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right) (-\sin \varphi \sin \theta) - \partial_\varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \right) (-\cos \varphi \sin \theta) = \\ &= -\cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= -\partial_\varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right) (\cos \varphi \cos \theta) - \partial_\varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \right) (\sin \varphi \cos \theta) = \\ &= \cos^2 \varphi \cot \theta + \sin^2 \varphi \cot \theta = \cot \theta \end{aligned}$$

Pozostałe współczynniki Christoffela na sferze proszę wyznaczyć samodzielnie. Żeby oszczędzić sobie rachunków można skorzystać z faktu (który udowodnimy wkrótce), że

Fakt 17 Współczynniki Christoffela na powierzchni zanurzonej są symetryczne, tzn $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.

Dowód: Symetria współczynników Christoffela dla pochodnej kowariantnej pochodzącej od zanurzenia powierzchni w przestrzeń afiniczną z iloczynem skalarnym wynika z symetrii drugich pochodnych cząstkowych. Istotnie, wyrazy macierzowe występujące we wzorze (39) pochodzą od zamiany zmiennych, tzn

$$(A^{-1})_k^a = \frac{\partial x^a}{\partial \varphi^k}.$$

Wstawiając powyższą postać wyrazów macierzowych $(A^{-1})_k^a$ do (39) otrzymujemy

$$\Gamma_{ik}^j = \partial_i \left(\frac{\partial x^a}{\partial \varphi^k} \right) A_a^j = \frac{\partial^2 x^a}{\partial \varphi^i \partial \varphi^k} A_a^j = \partial_k \left(\frac{\partial x^a}{\partial \varphi^i} \right) A_a^j = \Gamma_{ki}^j \quad \square$$



W dalszym ciągu spróbujemy przyjrzeć się pochodnej kowariantnej i wyciągnąć z jej definicji istotne elementy, które można będzie uogólnić na rozmaitości niezanurzone. Szukamy więc tej dodatkowej struktury, która jest potrzebna, żeby pochodna kowariantna istniała. Najpierw pomyślimy chwile nad strukturą iterowanej wiązki stycznej $\mathbb{T}A$. Wiadomo, że TA jest trywialna i równa $A \times V$, zatem nie ma wątpliwości, że $\mathbb{T}A = A \times V \times V \times V$. Przestrzeń styczna do TA w punkcie (q, w) zawiera wektory styczne do krzywych $t \mapsto (q(t), w(t))$, gdzie $q(0) = q$, $w(0) = w$. Oznaczmy $v = \dot{q}(0)$ i $u = \dot{w}(0)$. Element $\mathbb{T}A$ jest więc czwórką (q, w, v, u) . Wśród wszystkich krzywych w TA przechodzących przez (q, w) dla $t = 0$ możemy wyróżnić dwie klasy: krzywe dla których $q(t) = q$ jest stałe oraz krzywe dla których $w(t) = w$ jest stałe. Wektory styczne do krzywych z pierwszej klasy są postaci $(q, w, 0, u)$ a wektory styczne do krzywych z drugiej klasy mają postać $(q, w, v, 0)$. Pierwsze z nich nazywać będziemy *pionowymi* (wertykalnymi) a drugie *poziomymi* (horyzontalnymi). Wektory pionowe zaczepione w punkcie (q, w) oznaczmy $V_{q,w}TA$ a poziome $H_{q,w}TA$. W ten sposób mamy rozkład przestrzeni stycznej do TA w punkcie (q, w) na sumę prostą wektorów pionowych i poziomych:

$$\mathbb{T}_{q,w}TA = V_{q,w}TA \oplus H_{q,w}TA. \quad (41)$$

Krzywą poziomą, tzn taką dla której $w(t) = w$ jest stałe możemy interpretować jako przesunięcie równoległe wektora w wzdłuż krzywej $t \mapsto q(t)$.

Co z tego wszystkiego przetrwa obcięcie do powierzchni M ? Z całą pewnością nie wszystko. Wiemy już od dawna, że TM nie jest wiązką trywialną. Przestrzeń $\mathbb{T}_qM = W_q$ jest podprzestrzenią w V , ale w każdym punkcie nieco inną, więc w TM nie mamy struktury iloczynu kartezyjańskiego. Jedyne co pozostaje to rzut na M . Iterowana wiązka styczna $\mathbb{T}TM$ nadal zawiera oczywiście wektory styczne do krzywych w TM . Korzystając z zanurzenia w TA krzywą w TM nadal możemy zapisać jako $t \mapsto (q(t), w(t))$, ale pamiętać musimy, że $w(t) \in W_{q(t)}$. Nie ma trudności z zapisaniem krzywej pionowej $t \mapsto (q, w(t))$, jest to krzywa w TM jeśli $w(t) \in W_q$. Krzywej poziomej jednak nie da się wyróżnić. Krzywa $t \mapsto (q(t), w)$ może „wyłączyć” poza TM . Z rozkładu iterowanej przestrzeni stycznej na część poziomą i pionową przeżywa tylko podwiązka pionowa zawierająca wektory styczne do krzywych pionowych. Załóżmy teraz na chwilę, że M jest poziomą odwzorowania $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, potraktujmy $\mathbb{T}TM$ jako zawarte w $\mathbb{T}TA$ i sprawdźmy jakie podzbiory dostaniemy w poszczególnych czynnikach iloczynu kartezyjańskiego

$\mathbb{T}TA = A \times V \times V \times V$. Na pierwszym miejscu mamy $M \subset A$, $M = F^{-1}(0)$. Gdy ustalimy $q \in M$ to na drugim miejscu mamy $W_q = \ker F'(q)$. Rozważmy teraz krzywą $t \mapsto (q(t), w(t))$ w $\mathbb{T}M$. Wektor styczny do tej krzywej może nadal być reprezentowany czwórką (q, w, v, u) , musimy tylko wiedzieć jakie warunki muszą spełniać v i u . Krzywa $t \mapsto q(t)$ leży w M , zatem $v = \dot{q}(0)$ leży w W_q (na trzecim miejscu jest więc W_q). Krzywa $w(t)$ ma wartości w $W_{q(t)}$, to znaczy dla każdego t zachodzi

$$F'(q(t))(w(t)) = 0.$$

Po zróżniczkowaniu dostajemy zatem warunek na $u = \dot{w}(0)$ w postaci

$$F''(q)(v, w) + F'(q)(u) = 0.$$

Wektor u jest więc elementem podprzestrzeni afinicznej w V modelowanej na W_q . Podprzestrzeń ta zależy nie tylko od q i w ale także od v . Oznaczmy ją $U_{q,w,v}$ (to jest podzbiór pojawiający się na czwartym miejscu). Ostatecznie (q, w, v, u) jest elementem $\mathbb{T}TM$ jeśli $q \in M$, $w, v \in W_q$, $u \in U_{q,w,v}$. Co to wszystko ma wspólnego z pochodną kowariantną?

Wzór (35) definiujący $D_v X$ dla pola wektorowego X na przestrzeni afinicznej A wyrażony jest we współrzędnych, w dowolnym, ale afinicznym układzie współrzędnych. Czy potrafimy zdefiniować tę wielkość bez użycia współrzędnych? Niech v będzie elementem $\mathbb{T}_q A = V$ a $t \mapsto q(t)$ krzywą taką, że $\dot{q}(0) = v$. Pole wektorowe X jest odwzorowaniem $X : A \rightarrow \mathbb{T}A$. Składając $q(\cdot)$ z X otrzymujemy krzywą $t \mapsto X(q(t))$, której wartości leżą w $\mathbb{T}A$. Wektor styczny do $X \circ q(\cdot)$ w punkcie $(q, X(q))$ to czwórka $(q, X(q), v, D_v(X))$. Okazuje się, więc, że $D_v(X)$ jest częścią pionową wektora stycznego do $X \circ q(\cdot)$ wyznaczoną względem rozkładu (41). Dla pełnej poprawności musimy jeszcze zauważyć, że wektory pionowe są styczne do przestrzeni stycznej w jednym punkcie, zatem mogą zostać utożsamione z elementami tej przestrzeni.

Zgodnie z naszymi obserwacjami w $\mathbb{T}_{q,w} \mathbb{T}M$ jest wyróżniona podprzestrzeń wektorów pionowych, ale nie ma podprzestrzeni wektorów poziomych, dlatego nie ma też rozkładu podobnego do (41) i rzutu na wektory pionowe. Okazuje się jednak, że jeśli A (a właściwie V) jest wyposażona w iloczyn skalarny w $\mathbb{T}_{q,w} \mathbb{T}M$ to podprzestrzeń wektorów horyzontalnych pojawia się w sposób naturalny. Rozważmy wektor styczny do $\mathbb{T}M$ w punkcie (q, w) reprezentowany czwórką (q, w, v, u) . Wiadomo, że $w, v \in W_q$ oraz $u \in U_{q,w,v}$, przy czym ostatnia przestrzeń jest pewną podprzestrzenią afiniczną modelowaną na W_q . Zauważmy, że jeśli $U_{q,w,v}$ nie jest równe W_q , to $W_q^\perp \cap U_{q,w,v} = \{u_0\}$, tzn istnieje dokładnie jeden wektor prostopadły do W_q i zawarty w $U_{q,w,v}$. Istotnie, załóżmy, że są przynajmniej dwa różne takie wektory u_0 i \tilde{u}_0 . Wówczas $u_0 - \tilde{u}_0$ jest jednocześnie elementem przestrzeni W_q modelowej dla $U_{q,w,v}$ oraz elementem W_q^\perp . Oznacza to, że $u_0 = \tilde{u}_0$. Z drugiej strony $W_q^\perp \cap U_{q,w,v}$ nie może być zbiorem pustym. Każdy element $u \in U_{q,w,v}$ rozłożyć można według sumy prostej (36) $u = u^\parallel + u^\perp$. Wtedy $u^\perp = u - u^\parallel$ jest elementem $U_{q,w,v}$ i jednocześnie elementem W_p . Z powyższych rozważań wynika, że wszystkie $u \in U_{q,w,v}$ mają tę samą część prostopadłą do W_p . Czwórkę reprezentującą wektor styczny do $\mathbb{T}M$ w punkcie (q, w) można zapisać więc jako

$$(q, w, v, u_0 + u^\parallel)$$

i rozłożyć na sumę

$$(q, w, v, u_0 + u^\parallel) = (q, w, v, u_0) + (q, w, 0, u^\parallel). \quad (42)$$

Pierwszy wektor nazywać będziemy *poziomym* a drugi *pionowym*. Znowu widzimy, że część pionowa może być łatwo identyfikowana z elementem $u^\parallel \in \mathbb{T}_q M = W_q$. Ostatni wektor w

czwórce odpowiadającej wektorowi poziomemu jest jednoznacznie wyznaczony (zakładając, że znamy q, w, v) co oznacza, że istnieje podniesienie horyzontalne wektorów z $\mathbb{T}_q M$ do wektorów z $\mathbb{T}_{q,w} \mathbb{T}M$ dla dowolnego w . Istotnie niech $(q, v) \in \mathbb{T}_q M$ oraz $(q, w) \in \mathbb{T}_q M$ wtedy *podniesieniem horyzontalnym* (q, v) do punktu (q, w) nazywamy wektor

$$(q, v)_{(q,w)}^h = (q, w, v, u_0)$$

gdzie $u_0 = W_q^\perp \cap U_{q,w,v}$.

Wróćmy teraz do pola wektorowego X na M i wektora $v \in \mathbb{T}M$ stycznego do krzywej $t \mapsto q(t)$. Wektor styczny do złożenia $X \circ q(\cdot)$ jest elementem $\mathbb{T}\mathbb{T}M$ danym przez czwórkę $(q, X(q), v, D_v X)$. O $D_v X$ wiadomo, że należy do przestrzeni afinicznej $U_{q,X(q),v}$, daje się więc rozłożyć na sumę $D_v X = (D_v X)^\perp + (D_v X)^\parallel$. Zgodnie z (42) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (q, X(q), v, D_v X) &= (q, X(q), v, (D_v X)^\perp) + (q, w, 0, (D_v X)^\parallel) = \\ &= (q, X(q), v, (D_v X)^\perp) + (q, X(q), 0, \nabla_v X). \end{aligned} \quad (43)$$

Zapisać powyżej rozważania sformułujemy zaraz jako „Fakt”. Potrzebujemy jeszcze tylko bardziej eleganckiego opisu wektora stycznego do złożenia $X \circ q(\cdot)$. Jeśli potraktujemy X jako odwzorowanie $X : M \rightarrow \mathbb{T}M$ to wektor ten jest równy $\mathbb{T}X(v)$

Fakt 18 *Niech M oznacza powierzchnię zanurzoną w przestrzeni afinicznej A wyposażonej w iloczyn skalarny. Niech X będzie polem wektorowym na tej powierzchni. Pochodna kowariantna $\nabla_v X$ jest równa części pionowej wektora $\mathbb{T}X(v)$.*

Pokazaliśmy, że pochodna kowariantna na powierzchni M wiąże się z istnieniem rozkładu przestrzeni stycznej do $\mathbb{T}M$ na część pionową i poziomą. Na powierzchni zanurzonej w \mathbb{R}^n ten rozkład istnieje naturalnie (bo \mathbb{R}^n ma iloczyn skalarny). Rozkład przestrzeni stycznej na część poziomą i pionową nazywa się *koneksją* albo *powiązaniem*. Pochodna kowariantna i powiązanie są dwoma różnymi opisami tej samej struktury. W następnym semestrze dowiemy się, że bardzo podobnie definiuje się koneksję i pochodną kowariantną w dowolnej wiązce wektorowej lub w wiązce głównej (cokolwiek to znaczy). Na razie może się wydawać, że wszystkie te rachunki prowadzące od definicji 28 do faktu 18 są jedynie niepotrzebnym komplikowaniem prostego obiektu geometrycznego. Okazuje się jednak, że taki język (przestrzenie wertykalne i horyzontalne, podniesienie horyzontalne i koneksja) jest bardzo dobry do interpretowania na przykład krzywizny koneksji (następny semestr!). Już za chwilę przyda nam się to wszystko do uzyskania odpowiedzi na pytanie co z czym powiązanie wiąże i jak przesuwając równolegle wektory na powierzchni zanurzonej.

W wiązce stycznej do przestrzeni afinicznej A wyróżniliśmy krzywe poziome postaci $t \mapsto (q(t), v)$ i pionowe postaci $t \mapsto (q, v(t))$. Krzywą poziomą interpretowaliśmy jako przesunięcie stałego wektora v wzdłuż krzywej $t \mapsto q(t)$. Zauważyliśmy także, że na powierzchni $M \subset A$ możemy wyróżnić naturalnie jedynie krzywe pionowe. Okazuje się jednak, że w obecności iloczynu skalarnego także pojęcie krzywej poziomej, a co za tym idzie przesunięcia wektora wzdłuż krzywej w M ma sens. Niech więc $t \mapsto q(t)$ będzie krzywą w M . W każdym punkcie tej krzywej wyznaczamy wektor styczny $(q(t), \dot{q}(t))$, który następnie podnosimy horyzontalnie do każdego punktu $(q(t), w) \in \mathbb{T}_{q(t)} M$. Otrzymamy w ten sposób pole wektorowe na $\tau_M^{-1}(\{q(t), t \in I\})$. To pole wektorowe możemy potraktować jak równanie różniczkowe na krzywe w $\mathbb{T}M$ leżące

nad krzywą $t \mapsto q(t)$. Rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym dla $t = t_0$ będącym wektorem $w \in T_{q(t_0)}M = W_{q(t_0)}$ nazwiemy *przesunięciem równoległym wektora w wzdłuż krzywej $t \mapsto q(t)$* . Zobaczmy jak we współrzędnych wyglądać będzie równanie różniczkowe na przesunięcia równoległe.

Rozważmy więc krzywą

$$t \longmapsto (q(t), w(t)) \in TM, \quad \text{to znaczy} \quad q(t) \in M, \quad w(t) \in W_{q(t)}.$$

Chcemy, żeby wektory styczne do tej krzywej były w każdym punkcie wektorami poziomymi. Krzywą $t \mapsto q(t)$ traktujemy jako daną, szukamy krzywej $t \mapsto w(t)$ spełniającej warunek początkowy $w(0) = w$. Wektor styczny do krzywej $t \mapsto (q(t), w(t))$ w punkcie odpowiadającym wartości parametru t jest elementem TTM postaci $(q(t), w(t), \dot{q}(t), \dot{w}(t))$. Wektor ten jest horyzontalny jeśli $\dot{q}(t) \in W_{q(t)}^\perp$.

$$\dot{w}(t) = \dot{w}(t)^a e_a = \dot{w}(t)^a A_a^i(q(t)) \partial_i + \dot{w}(t)^a A_a^\alpha n_\alpha.$$

Warunek horyzontalności oznacza, że

$$\forall i \quad \dot{w}(t)^a A_a^i(q(t)) = 0. \quad (44)$$

Ten warunek zapiszmy w terminach współrzędnych (φ^i) na M , gdyż wiadomo, że $w(t) = w^i(t) \partial_i$:

$$w^a(t) = (A^{-1}(q(t)))_k^a w^k(t).$$

Powyższy wzór wstawiamy do (44)

$$\dot{w}^a(t) = \frac{d}{dt} \left((A^{-1}(q(t)))_k^a w^k(t) \right) = \frac{d}{dt} \left((A^{-1}(q(t)))_k^a \right) w^k(t) + (A^{-1}(q(t)))_k^a \dot{w}^k(t).$$

Ostatecznie (rezygnujemy z jawnego wypisywania zależności od t)

$$0 = \frac{d}{dt} \left((A^{-1})_k^a \right) w^k A_a^i + (A^{-1})_k^a \dot{w}^k A_a^i = \partial_j (A^{-1})_k^a \dot{q}^j w^k A_a^i + \dot{w}^i = \\ \left[\partial_j (A^{-1})_k^a A_a^i \right] \dot{q}^j w^k + \dot{w}^i = \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j w^k + \dot{w}^i$$

Warunek na horyzontalność krzywej $t \mapsto (q(t), w(t))$ we współrzędnych ma postać

$$\dot{w}^i = -\Gamma_{jk}^i \dot{q}^j w^k \quad (45)$$

Przykład 19 Zróbmy stosowne rachunki na sferze dwuwymiarowej o promieniu 1 we współrzędnych (φ, ϑ) pochodzących od współrzędnych sferycznych. Współczynniki Christoffela to

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0, \quad \Gamma_{\varphi\vartheta}^\varphi = \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi = \cot \vartheta, \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\varphi = 0, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta = -\cos \vartheta \sin \vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\vartheta}^\vartheta = \Gamma_{\vartheta\varphi}^\vartheta = 0, \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\vartheta = 0,$$

Wyznamy przesunięcie równoległe wektora $w = \partial_\vartheta$ wzdłuż 30 równoleżnika, czyli wzdłuż krzywej $t \mapsto (t, \vartheta_0 = \frac{\pi}{3})$. Startujemy z pozycji (30°N0°E), czyli gdzieś w Algierii. Patrzymy w kierunku wektora $w(t)$ czyli początkowo na południe (w kierunku ∂_ϑ) i jedziemy na wschód.

Czy po objechaniu kuli ziemskiej nadal będziemy patrzeć na południe? Okazuje się, że układ równań, który mamy do rozwiązania to

$$\begin{bmatrix} \dot{w}^\varphi \\ \dot{w}^\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cot \vartheta_0 \\ -\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^\varphi \\ w^\vartheta \end{bmatrix}$$

co dla $\vartheta_0 = \pi/3$ przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \dot{w}^\varphi \\ \dot{w}^\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^\varphi \\ w^\vartheta \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie z warunkiem początkowym $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ma postać

$$\begin{bmatrix} w^\varphi \\ w^\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t/2) & 2\sqrt{3} \sin(t/2)/3 \\ \sqrt{3} \sin(t/2)/2 & \cos(t/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Czyli

$$w^\varphi(t) = 2\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{t}{2}\right), \quad w^\vartheta(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right),$$

inaczej

$$w(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \partial_\varphi + \cos\left(\frac{t}{2}\right) \partial_\vartheta.$$

Dla $t = 2\pi$, czyli po objechaniu całego równoleżnika dostajemy $w(2\pi) = -\partial_\vartheta$, czyli patrzymy na północ!!! Przesunięcie równoległe po krzywej zamkniętej w M nie musi być krzywą zamkniętą w TM . Odstępstwo krzywej horyzontalnej rzutującej się na krzywą zamkniętą w M od krzywej zamkniętej w TM mierzy wielkość zwana krzywizną koneksji (przyszły semestr). ♣

Koneksję na powierzchni zanurzonej skonstruowaliśmy z użyciem iloczynu skalarnego indukowanego z przestrzeni w której zanurzamy. Okazuje się jednak, że zależność od zanurzenia jest dość słaba. Precyzyjniej mówiąc, koneksja zależy jedynie od iloczynu skalarnego obciętego do powierzchni, a nie zależy od tego co dzieje się w kierunkach prostopadłych. Mówi o tym następujący fakt (niezbyt wyrafinowane sformułowanie „Theorema Egregium” Gaussa)

Fakt 19 *Pochodna kowariantna i przesunięcie równoległe na powierzchni zanurzonej mają charakter wewnętrzny, tzn zależą jedynie od iloczynu skalarnego (metryki) indukowanej na powierzchni.*

Dowód: Zaczniemy od wyliczenia $\nabla_v g$, gdzie v jest dowolnym wektorem stycznym do M a g jest formą dwuliniową symetryczną reprezentującą iloczyn skalarny, czyli inaczej tensorem metrycznym na M . Tensor g pochodzi z obcięcia iloczynu skalarnego z TA . W bazie (e_a) macierz g ma postać $g_{ab} = (e_a|e_b)$. Wyrazy macierzowe g_{ab} są stałe, tzn. nie zależą od punktu na powierzchni. Obcięcie iloczynu skalarnego można zapisać także w bazie związanej z układem współrzędnych na powierzchni. Wtedy $g_{ij} = (\partial_i|\partial_j)$. Wyrazy macierzowe g_{ij} są funkcjami współrzędnych (φ^i) . W notacji tensorowej iloczyn skalarny zapiszemy jako

$$g = g_{ij} d\varphi^i \otimes d\varphi^j.$$

Do tej pory liczyliśmy pochodną kowariantną jedynie pól wektorowych. Można ją jednak rozszerzyć (poprzez regułę Leibniza) na dowolne pola tensorowe. Jak pochodna kowariantna działa na formy (pola kowektorowe)? Niech $\alpha = \alpha_i \mathbf{d}\varphi^i$ będzie polem kowektorowym a $X = X^i \partial_i$ polem wektorowym. Wtedy $\langle \alpha, X \rangle$ jest funkcją na M . Pochodna kowariantna funkcji jest pochodną zwykłą, czyli działaniem wektora stycznego na funkcję

$$\nabla_v \langle \alpha, X \rangle = v^i \partial_i (\alpha_j X^j) = v^i (\partial_i \alpha_j) X^j + v^i \alpha_j (\partial_i X^j). \quad (46)$$

Z drugiej strony, zgodnie z regułą Leibniza powinno być

$$\nabla_v \langle \alpha, X \rangle = \langle \nabla_v \alpha, X \rangle + \langle \alpha, \nabla_v X \rangle = v^i (\nabla_i \alpha)_j X^j + v^i \alpha_j (\partial_i X^j + \Gamma_{ik}^j X^k) \quad (47)$$

Z porównania (46) i (47) wynika, że

$$v^i (\partial_i \alpha_j) X^j = v^i (\nabla_i \alpha)_j X^j + v^i \alpha_j \Gamma_{ik}^j X^k,$$

czyli

$$v^i (\nabla_i \alpha)_k X^k = v^i (\partial_i \alpha_k) X^k - v^i \alpha_j \Gamma_{ik}^j X^k.$$

Ostatecznie

$$(\nabla_i \alpha) = (\partial_i \alpha_k - \alpha_j \Gamma_{ik}^j) \mathbf{d}\varphi^k. \quad (48)$$

Dalej, korzystając cały czas z reguły Leibniza, otrzymujemy

$$\nabla_i (g_{jk} \mathbf{d}\varphi^j \otimes \mathbf{d}\varphi^k) = (\partial_i g_{jk}) \mathbf{d}\varphi^j \otimes \mathbf{d}\varphi^k + g_{jk} \mathbf{d}(\nabla_i \mathbf{d}\varphi^j) \otimes \mathbf{d}\varphi^k + g_{jk} \mathbf{d}\varphi^j \otimes (\nabla_i \mathbf{d}\varphi^k).$$

Wynika z tego, że

$$(\nabla_i g)_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl}. \quad (49)$$

Do obliczenia ∇g wykorzystamy teraz fakt, że tensor metryczny na M pochodzi z obciążenia stałego tensora metrycznego na A . Przypomnijmy oznaczenia, których używaliśmy wcześniej. Macierz A to macierz przejścia między bazami (e_a) oraz (∂_i, n_α) , gdzie ∂_i to oczywiście wektory stycznymi do M związane z układem współrzędnych a n_α to wektory prostopadłe do M . Dokładniej

$$e_a = A_a^i \partial_i + A_a^\alpha n_\alpha.$$

Macierz odwrotną do A oznaczają będziemy tym razem B , tzn

$$\partial_i = B_i^a e_a, \quad n_\alpha = B_\alpha^a e_a.$$

Wyrazy macierzowe macierzy A i B zależą od współrzędnych (φ^i) na powierzchni M .

$$g_{jk} = (\partial_j | \partial_k) = (B_j^a e_a | B_k^b e_b) = B_j^a B_k^b g_{ab}$$

Do wzoru (49) wstawiamy wzory wynikające z definicji współczynników Γ z użyciem macierzy A i B oraz powyższe wyrażenie na g_{jk} . „Gammy” zaznaczamy na szaro:

$$\begin{aligned} (\nabla_i g)_{jk} &= \partial_i (B_j^a B_k^b g_{ab}) - (\partial_i B_j^a) A_a^l B_l^c B_k^d g_{cd} - (\partial_i B_k^a) A_a^l B_j^c B_l^d g_{cd} = \\ &= \partial_i (B_j^a) B_k^b g_{ab} + B_j^a \partial_i (B_k^b) g_{ab} - (\partial_i B_j^a) A_a^l B_l^c B_k^d g_{cd} - (\partial_i B_k^a) A_a^l B_j^c B_l^d g_{cd} \end{aligned} \quad (50)$$

Zajmiemy się oddzielnie wyrazami niebieskimi i oddzielnie czerwonymi. Tak naprawdę wystarczy policzyć niebieskie – czerwone są niemal jednakowe.

$$\begin{aligned} \partial_i(B_j^a) B_k^b g_{ab} - (\partial_i B_j^a) A_a^l B_l^c B_k^d g_{cd} &= \partial_i(B_j^a) \left(B_k^b g_{ab} - A_a^l B_l^c B_k^b g_{cb} \right) = \\ \partial_i(B_j^a) B_k^b \left(g_{ab} - A_a^l B_l^c g_{cb} \right) &= \partial_i(B_j^a) B_k^b \left((e_a|e_b) - (A_a^l B_l^c e_c|e_b) \right) = \\ &= \partial_i(B_j^a) B_k^b (e_a - A_a^l B_l^c e_c|e_b) \end{aligned}$$

Skoro

$$e_a = A_a^l \partial_l + A_a^\alpha n_\alpha \quad \text{oraz} \quad \partial_l = B_l^c e_c$$

to

$$e_a = A_a^l B_l^c e_c + A_a^\alpha n_\alpha$$

i

$$e_a - A_a^l B_l^c e_c = A_a^\alpha n_\alpha.$$

Kontynuujemy rachunki

$$\begin{aligned} \partial_i(B_j^a) B_k^b (e_a - A_a^l B_l^c e_c|e_b) &= \partial_i(B_j^a) B_k^b (A_a^\alpha n_\alpha|e_b) = \\ &= \partial_i(B_j^a) (A_a^\alpha n_\alpha|B_k^b e_b) = \partial_i(B_j^a) (A_a^\alpha n_\alpha|\partial_k) = 0 \end{aligned}$$

Okazuje się, że niebieski fragment wzoru (50) daje 0, czerwony też, więc ostatecznie, dla dowolnego v

$$\nabla_v g = 0.$$

Wypiszemy warunek na współrzędne ∇g permutując cyklicznie wkaźniki

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_i g)_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl} \\ 0 &= (\nabla_j g)_{ki} = \partial_j g_{ki} - \Gamma_{jk}^l g_{li} - \Gamma_{ji}^l g_{kl} \\ 0 &= (\nabla_k g)_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il} \end{aligned}$$

Od pierwszego wiersza odejmujemy drugi i trzeci. Korzystamy z symetrii symboli Chrisoffela względem dolnych wkaźników oraz z symetrii tensora metrycznego. Czerwone i niebieskie wyrazy upraszczają się i otrzymujemy

$$0 = \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} + 2\Gamma_{jk}^l g_{li}$$

Wyznaczamy

$$\Gamma_{jk}^m = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}). \quad (51)$$

Okazało się, że symbole Christoffela zawierające pełną informację o koneksji, dają się wyrazić przez współczynniki metryki i ich pochodne w kierunkach stycznych do powierzchni. Istotnie więc, koneksja jest wewnętrznym obiektem geometrycznym na powierzchni zanurzonej. \square

Wzór (51) jest bardzo ważny. My wyprowadziliśmy go dla koneksji zdefiniowanej na powierzchni zanurzonej w przestrzeni afinicznej z iloczynem skalarnym. Okazuje się, że pozostaje on prawdziwy w ogólniejszej sytuacji. Prawdziwe jest twierdzenie (T. Levi-Civita), które mówi, że na rozmaitości z metryką g istnieje dokładnie jedna koneksja symetryczna (tzn. taka, dla której symetryczne są symbole Christoffela) i zgodna ze strukturą metryczną. Zgodność ze strukturą metryczną oznacza właśnie, że $\nabla g = 0$. Koneksja taka nazywa się koneksją metryczną lub koneksją Levi-Civity. Nasz fakt 19 można by zatem sformułować inaczej: *Pochodna kowariantna zdefiniowana wzorem (37) pochodzi od koneksji metrycznej związanej z metryką na A obciętą do M .*



Rys. 23: Tullio Levi-Civita,
(1873-1941)