

Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

17 października 2013

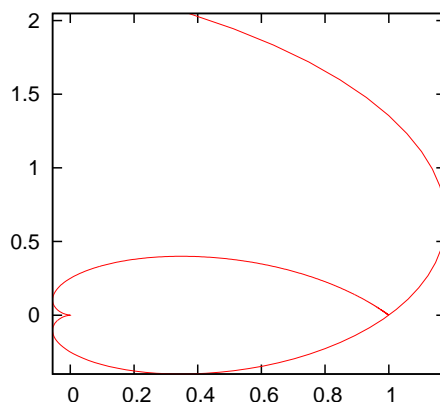
1 Powierzchnie zanurzone

Twierdzenie dotyczące parametryzacji jest jedynie lokalne, dlatego oprócz rzędu odwzorowania należy sprawdzać przynajmniej injektywność. Poniższy przykład pokazuje jednak, że nawet globalna injektywność nie wystarcza:

Przykład 1 Rozważmy obraz następującego odwzorowania

$$\kappa : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \left((e^t - 1)^2 \cos(\pi e^t), (e^t - 1)^2 \sin(\pi e^t) \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Interesuje nas, czy obraz ten jest jednowymiarową powierzchnią w \mathbb{R}^2 . Bardzo przydatny będzie rysunek. Patrząc na rysunek (Rys 1) natychmiast identyfikujemy dwa punkty podejrzan o

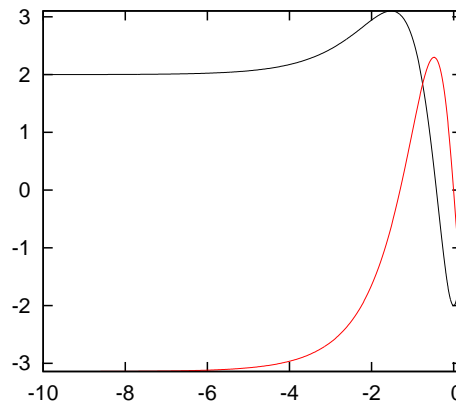


Rys. 1: Czy to jest powierzchnia?

powodowanie kłopotów: dla $t = 0$ mamy punkt $(0, 0)$ w którym wydaje się być „dzióbek”, ponadto wygląda na to, że w punkcie $(1, 0)$ jest samoprzecięcie, a przynajmniej rozgałęzienie. Zapomnijmy teraz o obrazku i spróbujmy zidentyfikować kłopoty na poziomie rachunkowym. Wyznaczamy κ' :

$$\begin{aligned} \kappa'(t) &= \begin{bmatrix} 2(e^t - 1)e^t \cos(\pi e^t) - (e^t - 1)^2 \sin(\pi e^t)\pi e^t \\ 2(e^t - 1)e^t \sin(\pi e^t) + (e^t - 1)^2 \cos(\pi e^t)\pi e^t \end{bmatrix} = \\ &= (e^t - 1)e^t \begin{bmatrix} 2 \cos(\pi e^t) - \pi(e^t - 1) \sin(\pi e^t) \\ 2 \sin(\pi e^t) + \pi(e^t - 1) \cos(\pi e^t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rzut oka na wykresy (Rys 2) funkcji $t \mapsto 2 \cos(\pi e^t) - \pi(e^t - 1) \sin(\pi e^t)$ (na czarno) i $t \mapsto 2 \sin(\pi e^t) + \pi(e^t - 1) \cos(\pi e^t)$ (na czerwono) pokazuje, że funkcje te nie zerują się jednocześnie,



Rys. 2: Pomocne wykresy.

zatem rząd pochodnej jest mniejszy od 1 jedynie w przypadku, kiedy $e^t = 1$, tzn $t = 0$. W otoczeniu punktu $(0, 0)$ będącego obrazem $t = 0$ nie możemy korzystać z twierdzenia (??). Istotnie mamy wtedy osobliwość typu „dzióbek”. W okolicach $t = 0$ pierwsza współrzędna krzywej zachowuje się jak $-t^2$ zaś druga jak $-\pi t^3$. Zależność między pierwszą współrzędną (x) a drugą (y) to mniej więcej $x \sim y^{2/3}$. Mamy więc dla $y \neq 0$

$$\frac{dx}{dy} \sim y^{-\frac{1}{3}}.$$

Dla $y = 0$ pochodna nie istnieje, granice pochodnej z obu stron są nieskończone i mają różne znaki. Wygląda na to, że poza punktem $t = 0$ możemy korzystać z twierdzenia (??), tzn. dla każdego $t \neq 0$ istnieje takie $\epsilon > 0$, że obraz odcinka $]t - \epsilon, t + \epsilon[$ względem κ jest jednowymiarową powierzchnią w \mathbb{R}^2 . Co zatem z punktem $(1, 0)$?

Sprawdźmy injektywność odwzorowania κ . Czy istnieją liczby t i s takie, że $\kappa(t) = \kappa(s)$? Wspomagając się nieco znajomością biegunowego układu współrzędnych stwierdzamy, że przede wszystkim $\pi e^t = \pi e^s + 2\pi$, tzn $e^t = e^s + 2$. Potrzeba ponadto także aby $(e^t - 1)^2 = (e^s - 1)^2$. Korzystając z pierwszego warunku otrzymujemy, że

$$e^t + 1 = e^t - 1 \quad \text{lub} \quad e^t + 1 = -e^t + 1$$

Pierwsze równanie jest w sposób oczywisty sprzeczne, zaś drugie oznacza, że $e^t = 0$, co też nie ma rozwiązań. Myśląc w języku współrzędnych biegunowych pomijamy sytuację $r = 0$, φ dowolne, jednak tutaj $r = 0$ oznacza $e^t = 1$, czyli $t = 0$ - jedno rozwiązanie. Stwierdzamy więc, że odwzorowanie κ jest injektywne. Nadal więc nie znaleźliśmy żadnych kłopotów w punkcie $(1, 0)$, które widać na rysunku. Zauważymy je dopiero, gdy zwrócimy uwagę na fakt, że co prawda równanie $e^t = 0$ nie ma rozwiązań w \mathbb{R} , to spełnia je $-\infty$. W granicy $t \rightarrow -\infty$ nasza krzywa $t \rightarrow \kappa(t)$ zmierza więc do punktu, który już raz minęła przy $t = \log 2$, czyli właśnie do punktu $(1, 0)$. Morał z tego przykładu jest taki: nie wystarczy sprawdzić rzędu odwzorowania i jego injektywności, żeby mieć pewność, że obraz tego odwzorowania jest powierzchnią! ♣

W dalszym ciągu będziemy chcieli uprawiać analizę na powierzchniach – nauczyć się różniczkować i całkować odpowiednie obiekty zdefiniowane na powierzchni. W tym celu musimy w jakiś sposób identyfikować punkty na powierzchni. Sposobu identyfikacji punktów dostarcza sama definicja 1 powierzchni zanurzonej. Niech Φ będzie używanym w definicji układem współrzędnych. Znikanie ostatnich $n - k$ współrzędnych definiuje powierzchnię. Pierwsze k współrzędnych może być za to użyte do identyfikacji każdego z punktów zbioru $S \cap \mathcal{U}$. Bardziej ogólnie:

Definicja 1 Niech $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$ będzie jak w definicji . Niech także $\mathcal{V} \subset S \cap \mathcal{U}$ będzie zbiorem otwartym na powierzchni S . Odwzorowanie $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ nazywamy *mapą* lub *układem współrzędnych* na powierzchni S jeśli Ψ jest gładkim dyfeomorfizmem \mathcal{V} i $\Psi(\mathcal{V})$. Precyzyjniej odwzorowanie $pr \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$ gdzie $pr : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest projekcją na pierwsze k współrzędnych, jest gładkim dyfeomorfizmem $\Psi(\mathcal{V})$ i $pr(\Phi(\mathcal{V}))$. Funkcje $y^i : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1 \dots k$ składające się na Ψ nazywamy *współrzędnymi* na S . Odwzorowanie odwrotne do Ψ nazywamy *parametryzacją*.

Przykład 2 Skonstruujemy współrzędne stereograficzne na sferze dwuwymiarowej $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Niech \mathcal{O}_+ oznacza $S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ zaś \mathcal{O}_- oznacza $S \setminus \{(0, 0, -1)\}$. Odwzorowania

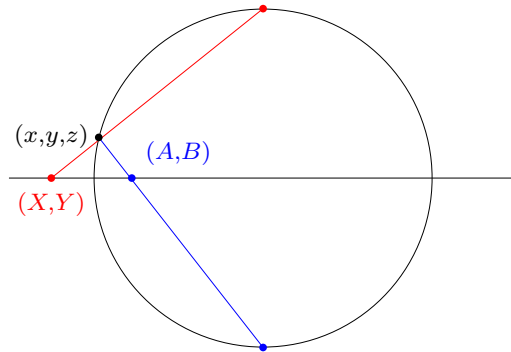
$$\Psi_+ : \mathcal{O}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (X, Y), \quad X = \frac{x}{1-z} \quad Y = \frac{y}{1-z} \quad (1)$$

$$\Psi_- : \mathcal{O}_- \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (A, B), \quad A = \frac{x}{1+z} \quad Y = \frac{y}{1+z} \quad (2)$$

są mapami na S . Zauważmy, że na zbiorze $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, gdzie określone są oba układy współrzędnych odwzorowanie zamiany zmiennych

$$\mathbb{R}^2 \ni (A, B) \longmapsto (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \quad X = \frac{A}{A^2 + B^2}, \quad Y = \frac{B}{A^2 + B^2}$$

jest odwzorowaniem gładkim. ♣



Rys. 3: Współrzędne stereograficzne.

Na sferze używamy też często współrzędnych pochodzących ze sferycznego układu współrzędnych. Łatwiej je zapisać w postaci parametryzacji

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \cos \vartheta \end{cases}, \quad \varphi \in]0, 2\pi[, \quad \vartheta \in]0, \pi[.$$

2 Przestrzeń styczna i kostyczna

Niech A będzie przestrzenią afiniczną modelowaną na przestrzeni wektorowej V . Używać będziemy algebry $C^\infty(A)$ funkcji gładkich na A oraz zbioru gładkich krzywych w A , czyli gładkich odwzorowań $I \rightarrow A$, gdzie I jest odcinkiem otwartym. Wygodnie jest założyć, że odcinek ten zawiera 0. Pochodna krzywej γ w punkcie $t = 0$ jest odwzorowaniem liniowym z \mathbb{R} do V . W poniższej definicji występuje $\gamma'(0)1$, czyli wartość odwzorowania $\gamma'(0)$ na $1 \in \mathbb{R}$:

Definicja 2 *Wektorem stycznym* do krzywej γ w punkcie $t = 0$ nazywamy parę $(\gamma(0), \gamma'(0)1) \in A \times V$. Punkt $\gamma(0) \in A$ nazywamy punktem zaczepienia wektora $(\gamma(0), \gamma'(0)1)$. Zbiór wektorów stycznych do wszystkich krzywych w A oznaczamy $\mathbb{T}A$ i nazywamy przestrzenią styczna do A . Zbiór wektorów zaczepionych w $a \in A$ oznaczamy \mathbb{T}_aA

Jest rzeczą oczywistą, że $\mathbb{T}A = A \times V$, gdyż dla dowolnej pary (a, v) znaleźć można krzywą dla której ta właśnie para jest wektorem stycznym, np. $t \mapsto a + tv$. Podobnie oczywiste jest, że $\mathbb{T}_aA = V$. Przestrzeń wektorów stycznych do A w punkcie a ma więc strukturę przestrzeni wektorowej. Na razie nie będziemy bliżej zastanawiać się nad tą strukturą (wektorową). Proszę jednak zapamiętać tę obserwację. W tym momencie wydaje się ona oczywista (skoro $\mathbb{T}_aA = V$, a V jest przestrzenią wektorową, to \mathbb{T}_aA też jest przestrzenią wektorową), ale już wkrótce sytuacja się nieco skomplikuje.

Niech $\Phi : A \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \mapsto (\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a))$ będzie układem współrzędnych w A . W szczególności oznacza to, że pochodne $\Phi'(a)$ oraz $(\Phi^{-1})'(\Phi(a))$ są rzędu n dla $a \in U$. Ustalmy punkt $a \in U$. Niech γ_i oznacza krzywą

$$t \mapsto \gamma_i(t) = \Phi^{-1}(\varphi^1(a), \dots, \varphi^i(a) + t, \dots, \varphi^n(a)).$$

Wektory styczne do krzywych γ_i w $t = 0$ rozpinają przestrzeń \mathbb{T}_aA . Zauważmy, że wektor styczny do krzywej γ_i jest obrazem względem $(\Phi^{-1})'(\Phi(a))$ i -tego wektora bazy standardowej w \mathbb{R}^n . Maksymalny rząd pochodnej Φ^{-1} gwarantuje, że wektory styczne do krzywych γ_i są liniowo niezależne, stanowią więc bazę \mathbb{T}_aA . W geometrii różniczkowej mówimy, że jest to baza pochodząca od układu współrzędnych. Wprowadzamy też specjalne oznaczenia: wektor styczny do krzywej γ_i oznaczamy

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \quad \text{lub} \quad \partial_i,$$

jeśli odwoływanie się do konkretnej nazwy współrzędnych φ^i nie jest konieczne. Wektor (a, v) możemy teraz zapisać przy pomocy współrzędnych $(\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a), \dot{\varphi}^1(v), \dots, \dot{\varphi}^n(v))$ jeśli

$$v = \dot{\varphi}^1(v)\partial_1 + \dots + \dot{\varphi}^n(v)\partial_n.$$

Odwzorowanie

$$U \times V \ni (a, v) \mapsto (\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a), \dot{\varphi}^1(v), \dots, \dot{\varphi}^n(v)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

jest układem współrzędnych w otwartym podzbiórze przestrzeni stycznej. Oznaczanie wektorów stycznych symbolem związanym z różniczkowaniem ma głęboki sens, o którym za chwilę.

Definicja 3 Przestrzenią styczną do powierzchni $S \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór wektorów stycznych do krzywych, których obrazy leżą w S . Przestrzeń styczną do S oznaczmy $\mathbb{T}S$

Przestrzeń styczna TS jest zgodnie z definicją podzbiorem przestrzeni stycznej $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Każdy wektor styczny ma dobrze zdefiniowany punkt zaczepienia. Formalnie rzecz biorąc mamy więc odwzorowanie $\tau_S : TS \rightarrow S$. Możemy wyróżnić także $T_x S = \tau_S^{-1}(x)$, czyli zbiór wektorów stycznych zaczepionych w punkcie x . $T_x S$ jest podzbiorem w $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, jednak w różnych punktach podzbiory te mogą być różne. Nie mamy więc w TS struktury iloczynu kartezyjańskiego, tak jak to było w TA . Okazuje się jednak, że

Fakt 1 *Podzbiór $T_x S$ jest podprzestrzenią wektorową w $T_x \mathbb{R}^n$ wymiaru równego wymiarowi powierzchni.*

Dowód: Na pierwszy rzut oka nie widać powodu, aby przestrzeń styczna do powierzchni w punkcie była podprzestrzenią wektorową w przestrzeni stycznej do \mathbb{R}^n . Podobnie jak nie bardzo wiadomo skąd się w ogóle bierze struktura wektorowa w $T_a A$. Żeby pokazać, że TS jest podprzestrzenią wektorową musimy sięgnąć aż do współrzędnych na S . W świecie geometrii różniczkowej oznacza to użycie brutalnej siły! Niech więc x będzie punktem powierzchni S i niech Φ będzie układem współrzędnych w otoczeniu x takim jak w definicji powierzchni. Oznacza to, że współrzędne $\varphi^{k+1} \dots \varphi^n$ znikają dla punktów na powierzchni, ponadto $\Phi(x) = 0$. Krzywa γ leżąca w S i przechodząca dla $t = 0$ przez x ma więc opis we współrzędnych $t \mapsto (\varphi^1(\gamma(t)), \varphi^2(\gamma(t)), \dots, \varphi^k(\gamma(t)), 0, \dots, 0)$.

Niech teraz (x, v) i (x, w) będą elementami $T_x S$. Czy $(x, v+w)$ oraz $(x, \lambda v)$ też są elementami $T_x S$? Zaproponujemy krzywe, których obrazy leżą w S i których wektory styczne to $(x, v+w)$ oraz $(x, \lambda v)$ korzystając z istnienia krzywych dla (x, v) i (x, w) . Niech więc $\gamma_v : I \rightarrow S \subset A$ oraz $\gamma_w : I \rightarrow S \subset A$ będą odpowiednimi krzywymi. Łatwo jest zdefiniować krzywą reprezentującą $(x, \lambda v)$:

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$$

dla odpowiednio małych t , aby argument krzywej γ_v mieścił się w dziedzinie. Wtedy istotnie

$$\gamma'_{\lambda v}(0)1 = \lambda \gamma'_v(0)1 = \lambda v.$$

Trudniej jest dla $(x, v+w)$. Musimy posłużyć się układem współrzędnych:

$$\gamma_{v+w}(t) = \Phi^{-1}(\Phi(\gamma_v(t)) + \Phi(\gamma_w(t))).$$

Idea jest następująca: nie możemy dodawać krzywych w A (nie ma dodawania punktów), nawet jeśli $A = \mathbb{R}^n$ i użyjemy struktury wektorowej do dodania $\gamma_v(t) + \gamma_w(t)$ to powstała w ten sposób krzywa zapewne nie będzie leżała w S a prawdopodobnie także nie będzie przechodziła przez x , chyba, że $x = 0$. Obrazy krzywych względem Φ przechodzą przez 0 (suma więc też) oraz leżą w podprzestrzeni wektorowej $\varphi^{k+1} = \dots = \varphi^n = 0$ (i suma też). Złożenie z Φ^{-1} przeprowadzi więc sumę w pewną krzywą w S przechodzącą przez x . Badamy wektor styczny:

$$\begin{aligned} \gamma'_{v+w}(0)1 &= (\Phi^{-1})'(0) [\Phi'(x)\gamma'_v(0)1 + \Phi'(x)\gamma'_w(0)1] = \\ &= (\Phi^{-1})'(0)\Phi'(x)\gamma'_v(0)1 + (\Phi^{-1})'(0)\Phi'(x)\gamma'_w(0)1 = \gamma'_v(0)1 + \gamma'_w(0)1 = v + w. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że $T_x S$ jest podprzestrzenią wektorową w V . Pozostaje kwestia wymiaru. Pokażemy, że $T_x S$ jest rozpięta przez ∂_i dla $i = 1 \dots k$. Jeśli krzywa γ leży w S , to krzywa $\Phi \circ \gamma$ leży w podprzestrzeni $\varphi^{k+1} = \dots = \varphi^n = 0$ w \mathbb{R}^n , zatem wektor styczny w

$t = 0$ da się zapisać jako kombinacja wektorów e_1, \dots, e_k z bazy kanonicznej \mathbb{R}^k . Współczynniki oznaczymy przez $\dot{\varphi}^i$. Mamy więc

$$v = \gamma'(0)1 = (\Phi^{-1} \circ \Phi \circ \gamma)'(0)1 = (\Phi^{-1})'(0)(\dot{\varphi}^1 e_1 + \dots + \dot{\varphi}^k e_k) = \dot{\varphi}^1 \partial_1 + \dots + \dot{\varphi}^k \partial_k$$

Wymiar $\mathbb{T}_x S$ jest co najwyżej k . Wiemy jednak także, że $(\Phi^{-1})'(0)$ jest rzędu n , więc wektory ∂_i są liniowo niezależne. \square

Pora na podsumowanie: Zdefiniowaliśmy przestrzeń styczną do przestrzeni afinicznej A jako zbiór wektorów stycznych do krzywych. Okazało się, że $\mathbb{T}A = A \times V$. Zdefiniowaliśmy także przestrzeń styczną $\mathbb{T}S$ do powierzchni S jako zbiór wektorów stycznych do krzywych, których obrazy leżą w S . Okazało się, że w ustalonym punkcie $\mathbb{T}_x S$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni wektorowej $\mathbb{T}_x A = V$. Wprowadziliśmy także bazę ∂_i w $\mathbb{T}_x A$ związaną z danym układem współrzędnych. Jeśli ten układ współrzędnych „pasuje” do powierzchni S , tzn. jest taki jak definicji powierzchni, to wektory ∂_i dla $i = 1 \dots k$ rozpinają $\mathbb{T}_x S$. Spójrzmy teraz szerzej: załóżmy, że mamy parametryzację κ pewnego zbioru otwartego \mathcal{O} w S . Wówczas krzywe $t \mapsto \kappa(x^1, \dots, x^i + t, \dots, x^k)$ leżą w S i wektory styczne do tych krzywych rozpinają $\mathbb{T}_x S$. Wektory te oznaczać będziemy, jak poprzednio, ∂_i lub $\frac{\partial}{\partial x^i}$, mimo, że nie mamy wyróżnionego uzupełnienia bazy $\mathbb{T}_x S$ do bazy V . Do zdefiniowania bazy w przestrzeni stycznej wystarczy parametryzacja lub układ współrzędnych na samym S , nie koniecznie w otoczeniu. Na następnym wykładzie zajmiemy się przestrzeniami dualnymi $(\mathbb{T}_x A)^*$, $(\mathbb{T}_x S)^*$. Mowa tu o dualności w sensie algebry liniowej.