Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

22 października 2013

1 Przestrzeń styczna i kostyczna c.d.

Pora na podsumowanie: Zdefiniowaliśmy przestrzeń styczną do przestrzeni afinicznej A jako zbiór wektorów stycznych do krzywych. Okazało się, że $\mathsf{T}A = A \times V$. Zdefiniowaliśmy także przestrzeń styczną $\mathsf{T}S$ do powierzchni S jako zbiór wektorów stycznych do krzywych, których obrazy leżą w S. Okazało sie, że w ustalonym punkcie T_xS jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni wektorowej $\mathsf{T}_xA = V$. Wprowadziliśmy także bazę ∂_i w T_xA związaną z danym układem współrzędnych. Jeśli ten układ współrzędnych „pasuje" do powierzchni S, tzn. jest taki jak definicji powierzchni, to wektory ∂_i dla $i = 1 \dots k$ rozpinają T_xS. Spójrzmy teraz szerzej: załóżmy, że mamy parametryzację κ pewnego zbioru otwartego $\mathcal{O}$ w S. Wówczas krzywe $t \longmapsto \kappa(x^1, \dots, x^i + t, \dots, x^k)$ leżą w S i wektory styczne do tych krzywych rozpinają T_xS. Wektory te oznaczać będziemy, jak poprzednio, ∂_i lub $\frac{\partial}{\partial x^i}$, mimo, że nie mamy wyróżnionego uzupełnienia bazy T_xS do bazy V. Do zdefiniowania bazy w przestrzeni stycznej wystarczy parametryzacja lub układ współrzędnych na samym S, nie koniecznie w otoczeniu.

Zauważmy, że przestrzeń styczna $\mathsf{T}S$ do powierzchni S sama też jest powierzchnią zanurzoną w $A \times V$. Odpowiedni układ współrzędnych można skonstruować korzystając z układu współrzędnych Φ w otoczeniu $\mathcal{U}$ punktu $x \in S$. Nowy układ współrzędnych będzie określony w $\mathcal{U} \times V$

$$\mathcal{U} \times V \ni (y, w) \longmapsto (\Phi(y), \Phi'(y)w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Wektor (y, w) należy do $\mathsf{T}S$ jeśli znikają współrzędne $(\varphi^{k+1}(y), \dots \varphi^n(y))$ oraz gdy $\Phi'(y)w = 0$. Pojęcie wektora stycznego jest często używane w teoriach fizycznych. Wektorem stycznym jest prędkość i przesunięcie wirtualne. Wybierając jeden wektor styczny w każdym punkcie definiujemy *pole wektorowe* na powierzchni S. Inaczej mówiąc

Definicja 1 *Polem wektorowym* na powierzchni S nazywamy odwzorowanie $X : S \to \mathsf{T}S$ takie, że $\tau_S \circ X = id_S$.

Mając bazę związaną z układem współrzędnych możemy zapisać pole za pomocą współczynników rozkładu wektorów będących wartościami pola w bazie:

$$X(x) = X^1(x)\partial_1 + X^2(x)\partial_2 + \cdots + X^k(x)\partial_k.$$

Mówimy, że pole jest różniczkowalne (gładkie), jeśli funkcje X^i są rożniczkowalne (gładkie). Używając pojęcia pola wektorowego mówi się w fizyce o polu elektrostatycznym, polu indukcji magnetycznej, polu grawitacyjnym itd. W mojej opinii inne obiekty geometryczne nadają się do tego nieco lepiej.

Przejdziemy teraz do definicji przestrzeni kostycznej. Zaczniemy tak jak poprzednio od całej przestrzeni afinicznej A. Jeśli f jest funkcją na A, to jej pochodna w ustalonym punkcie $f'(a)$ jest elementem przestrzeni $L(V, \mathbb{R})$ – odwzorowań liniowych na V o wartościach rzeczywistych. Na wykładzie z algebry liniowej ta przestrzeń nazywała się *przestrzenią sprzężoną* lub *dualną* i była oznaczana V^*. Na potrzeby geometrii różniczkowej pochodną $f'(a)$ nazywać będziemy różniczką funkcji f w punkcie a i oznaczać $\mathsf{d}f(a)$. Jest jasne, że zbiór wszystkich różniczek w ustalonym punkcie a to V^*. W kontekście geometrii różniczkowej będziemy oznaczać tę przestrzeń $\mathsf{T}^*_a A$, natomiast zbiór wszystkich różniczek we wszystkich punktach $\mathsf{T}A$. Mamy więc $\mathsf{T}^*A = A \times V^*$, $\mathsf{T}^*_a A = V^*$. Przestrzen kostyczna w punkcie jest dualna do przestrzeni stycznej w punkcie. Układ współrzędnych Φ umożliwia skonstruowanie bazy przestrzeni kostycznej. Łatwo sprawdzić, że układ różniczek $(\mathsf{d}\varphi^1(a), \ldots, \mathsf{d}\varphi^n(a))$ jest liniowo niezależny i rozpina przestrzeń kostyczną w punkcie. Widać także, że baza złożona z rożniczek współrzędnych jest bazą dualną względem bazy $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, tzn.

$$\langle \mathsf{d}\varphi^i(a), \partial_j \rangle = \delta^i_j.$$

Nietrudno także zgadnąc jak znaleźć współrzędne $\mathsf{d}f(a)$ w bazie $(\mathsf{d}\varphi^i)$:

$$\mathsf{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial \varphi^1}(a)\mathsf{d}\varphi^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}(a)\mathsf{d}\varphi^n,$$

gdzie $\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(a)$ oznacza pochodną cząstkową złożenia $f \circ \Phi^{-1}$ względem i-tej współrzędnej obliczoną w punkcie $\Phi(a)$.

A co z przestrzenią kostyczną do powierzchni? Niech $x \in S$ będzie ustalonym punktem powierzchni S zanurzonej w A. Co to jest różniczka funkcji f określonej jedynie na S powiedzieć nie potrafimy. Rozumowanie musi więc iść inna drogą.

Definicja 2 *Przestrzenią kostyczną* do powierzchni S w punkcie x nazywamy przestrzeń dualną do $\mathsf{T}_x S$ i oznaczamy $\mathsf{T}^*_x S$. Elementy przestrzeni kostycznej w punkcie x nazywamy *kowektorami* zaczepionymi w x. Zbiór wszystkich kowektorów zaczepionych we wszystkich punktach S nazywamy przestrzenią (wiązką) kostyczną do S i oznaczamy T^*S.

Posługując się wiedzą z zakresu algebry liniowej stwierdzamy, że przestrzeń $\mathsf{T}^*_x S$ jest kanonicznie izomorficzna z przestrzenią ilorazową $V^*/(\mathsf{T}_x S)^0$. Na wszelki wypadek warto przypomnieć, że skoro $\mathsf{T}_x S$ jest podprzestrzenią wektorową w V, to możemy rozważać jej anihilator $(\mathsf{T}_x S)^0$, czyli podprzestrzeń wektorową w V^* zawierającą wszystkie kowektory zerujące się na $\mathsf{T}_x S$. Dzielenie przez tę podprzestrzeń polega na utożsamieniu ze sobą kowektorów, które różnią się o kowektor znikający na $\mathsf{T}_x S$. Innymi słowy kowektor na S to klasa równoważności kowektorów na A. A gdzie tu różniczki funkcji na S?

Niech $f : S \to \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją na S. W otoczeniu $\mathcal{O} \subset A$ punktu x można tę funkcję rozszerzyć do funkcji $\tilde{f}$. Można to zrobić na przykład przy pomocy układu współrzędnych:

$$\tilde{f}(y) = f(\Phi^{-1}(\varphi^1(y), \ldots, \varphi^k(y), 0, \ldots, 0)).$$

Funkcja $\tilde{f}$ zgadza się z f na $\mathcal{O} \cap S$. Tego rodzaju rozszerzeń jest bardzo wiele i żadne z nich nie jest wyróżnione. Rozszerzenie jest funkcją określoną na otwartym zbiorze w A, zatem można wyznaczyć różniczkę tego rozszerzenia w punkcie x. Oczywiście różne rozszerzenia mogą mieć różne różniczki, jednak będą one należały do tej samej klasy równoważności względem dzielenia przez $(\mathsf{T}_x S)^0$. Istotnie, niech (x, v) będzie wektorem stycznym do krzywej γ leżącej w S. Niech także $\tilde{f}$ i $\bar{f}$ będą rozszerzeniami funkcji f, wtedy

$$\langle d\tilde{f}(x) - d\bar{f}(x), v\rangle = \langle d\tilde{f}(x), v\rangle - \langle d\bar{f}(x), v\rangle = (\tilde{f}\circ\gamma)'(0) - (\bar{f}\circ\gamma)'(0) = (f\circ\gamma)'(0) - (f\circ\gamma)'(0) = 0.$$

W powyższym rachunku wykorzystaliśmy fakt, że $\tilde{f} \circ \gamma = f \circ \gamma$ jeśli γ ma obraz w S.

Definicja 3 *Różniczką funkcji* $f : S \to \mathbb{R}$ w punkcie x nazywamy klasę równoważności dowolnego rozszerzenia funkcji f do funkcji gładkiej na otoczeniu punktu x w A

Przykład 1 Rozważmy powierzchnię $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Niech $p \in S^1$ będzie takim punktem, którego współrzedne kartezjańskie to $x(p) = \cos\alpha$, $x(p) = \sin\alpha$. W naturalnej parametryzacji kątem biegunowym φ punkt ten definiowany jest więc jako $\varphi(p) = \alpha$. Współrzędne kartezjańskie (x, y) stanowią układ współrzędnych na $A = \mathbb{R}^2$, podczas gdy współrzędna φ jest określona na S^1. W przestrzeni $\mathsf{T}_p A$ mamy więc bazę (∂_x, ∂_x) a w $\mathsf{T}^*_p A$ bazę $(\mathsf{d}x(p), \mathsf{d}y(p))$. Co to jest $\mathsf{d}\varphi(p)$? Najpierw przestrzeń styczna

$$\mathsf{T}_p S^1 = \{\lambda\partial_\varphi, \lambda \in \mathbb{R}\}, \qquad \partial_\varphi = -sin\alpha\,\partial_x + cos\alpha\,\partial_y.$$

Anihlator $(\mathsf{T}_p S)^0$ zawiera kowektory $\lambda\mathsf{d}x(p) + \mu\mathsf{d}y(p)$ spełniajace warunek

$$\langle\lambda\mathsf{d}x(p) + \mu\mathsf{d}y(p), -sin\alpha\,\partial_x + cos\alpha\,\partial_y\rangle = 0,$$

czyli kowektory proporcjonalne do

$$\cos\alpha\mathsf{d}x(p) + \sin\alpha\mathsf{d}y(p).$$

Kowektor $\mathsf{d}\varphi$ na S^1 jest klasą równoważności kowektorów na A wzgledem dzielenia przez $(\mathsf{T}_p S^1)^0$. Wiadomo ponadto, że jeśli kowektor należy do tej klasy, to obliczony na ∂_φ powinien dać 1, czyli

$$\langle\lambda\mathsf{d}x(p) + \mu\mathsf{d}y(p), -\sin\alpha\,\partial_x + \cos\alpha\,\partial_y\rangle = 1.$$

Tym razem $\lambda = -\sin(\alpha)$, $\mu = \cos\alpha$, zatem

$$\mathsf{d}\varphi = \cos\alpha\,\mathsf{d}y(p) - \sin\alpha\,\mathsf{d}x(p) + s[\cos\alpha\,\mathsf{d}x(p) + \sin\alpha\,\mathsf{d}y(p)], \quad s \in \mathbb{R}.$$

Używając wyłącznie współrzędnych kartezjańskich po prawej stronie napiszemy, że

$$\mathsf{d}\varphi = x(p)\mathsf{d}y(p) - y(p)\mathsf{d}x(p) + s[x(p)\mathsf{d}x(p) + y(p)\mathsf{d}y(p)], \quad s \in \mathbb{R}.$$

♣

W dalszym ciągu w oznaczeniach różniczek zazwyczaj będziemy pomijać odniesienie do konkretnego punktu, pamiętając jednak, ze każdy kowektor ma swój punkt zaczepienia. Formalnie mówiąc istnieje odwzorowanie $\pi_S : \mathsf{T}^*S \to S$ przypisujące kowektorowi jego punkt zaczepienia. W teoriach fizycznych kowektory pojawiają się rzadziej niż wektory (a powinny częściej). Kowektorem jest pęd punktu materialnego i siła działająca na punkt materialny.

Mowiliśmy już o polach wektorowch, czyli odwzorowaniach $S \to \mathsf{T}S$. Podobnie jest dla przestrzeni kostycznej

Definicja 4 Odwzorowanie $\alpha : S \to \mathsf{T}^*S$ takie, że $\pi_S \circ \alpha = id_S$ nazywamy polem kowektorowym lub jednoformą na S

Przykładem jednoformy jest rożniczka funkcji $x \mapsto \mathsf{d}f(x)$. Jednoformy mozna takze zapisywac w bazie związanej z układem współrzednych

$$\alpha(x) = \alpha_1(x)\mathsf{d}\varphi^1 + \alpha_2(x)\mathsf{d}\varphi^2 + \cdots + \alpha_k(x)\mathsf{d}\varphi^k.$$

Mówimy, że forma jest różniczkowalna (gładka) jeśli funkcje α_i są różniczkowalne (gładkie),

Zrobimy teraz przerywnik algebraiczny: Niech (V, g) będzie przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny g. Iloczyn skalarny jest to forma dwuliniowa symetryczna, niezdegenerowana i dodatnio określona, tzn. odwzorowanie

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

lliniowe ze względu na każdy argument (dwuliniowość), takie że $g(v, w) = g(w, v)$ (symetria), spełniające warunki $g(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$ (niezdegenerowanie) oraz $g(v, v) \geqslant 0$ (dodatnia określoność). Warunek niezdegenerowania można wyrazić jeszcze inaczej. Każda forma dwuliniowa zadaje odwzorowanie

$$G : V \longrightarrow V^*, \quad G(v) = g(v, \cdot).$$

Forma jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy G jest izomorfizmem liniowym. Iloczyn skalarny pozwala utożsamić przestrzeń wektorową z jej przestrzenią dualną. Mając bazę (e_i) w przestrzeni wektorowej możemy znaleźć macierz formy dwuliniowej

$$G_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Macierz formy symetrycznej jest symetryczna względem głównej przekątnej, macierz formy niezdegenerowanej jest niezdegenerowana a macierz formy symetrycznej dodatnio określonej jest diagonalizowalna i ma dodatnie wartości własne (twierdzenie spektralne). Ta sama macierz G_{ij} jest macierzą odwzorowania G w bazach (e_i) i dualnej (ε^j), tzn $[G_{ij}] = [G]^{\varepsilon}_{e}$.

Załóżmy teraz, że przestrzeń modelowa V dla przestrzeni afinicznej A jest wyposażona w iloczyn skalarny. Pozwala nam to liczyć długości wektorów

$$\|v\| = \sqrt{g(v, v)},$$

mierzyć odległości miedzy punktami przestrzeni afinicznej:

$$d(a_1, a_2) = \|a_2 - a_1\|.$$

oraz liczyć długości krzywych:

$$\ell(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(0)1\| dt.$$

Odpowiednie odwzorowanie

$$\mathsf{T}A \ni (a, v) \longmapsto (a, G(v)) \in \mathsf{T}^*A,$$

które dla ułatwienia będziemy oznaczać także literą G, jest izomorfizmem wiązki stycznej z wiązką kostyczną.

Iloczyn skalarny możemy mieć także na powierzchni, w tym sensie, że przestrzeń styczna w każdym punkcie $x \in S$ może być wyposażona w iloczyn skalarny g_x. Oczywiście nie możemy wybrać g_x całkiem dowolnie. Mając układ współrzędnych w zbiorze $\mathcal{U}$ otwartym w S i bazę (∂_i) w każdej z przestrzeni stycznych możemy zapisać macierz g_x w bazie. W różnych punktach macierze te mogą być różne. Każdy z wyrazów macierzowych jest teraz funkcją współrzędnych punktu na S. Będziemy wymagać, żeby wyrazy macierzowe zależały od współrzędnych punktu w sposób gładki. Mówimy wtedy, że S jest wyposażona w gładki iloczyn skalarny lub gładką metrykę. Często będziemy spotykać się z sytuacją, kiedy iloczyn skalarny na powierzchni S pochodzi od iloczynu skalarnego na przestrzeni afinicznej w której S jest zanurzony.

Przykład 2 Niech S^2 będzie dwuwymiarową sferą zanurzoną w $\mathbb{R}^3$. Przestrzeń styczna $\mathsf{T}_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$ w każdym punkcie wyposażona jest w iloczyn skalarny, którego macierz w bazie $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ jest macierzą jednostkową. Sprawdźmy jak wygląda iloczyn skalarny na sferze wyrażony we współrzędnych sferycznych. Parametryzacja sfery ma postać

$$x(\vartheta, \varphi) = \cos\varphi \sin\vartheta, \quad y(\vartheta, \varphi) = \sin\varphi \sin\vartheta, \quad z(\vartheta, \varphi) = \cos\vartheta.$$

Wobec tego wektory styczne w punkcie (ϑ, φ) wyrażają się w bazie $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ wzorami

$$\partial_\varphi = -\sin\varphi \sin\vartheta \partial_x + \cos\varphi \sin\vartheta \partial_y, \qquad \partial_\vartheta = \cos\varphi \cos\vartheta\, \partial_x + \sin\varphi \cos\vartheta\, \partial_y - \sin\vartheta\, \partial_z$$

Baza $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ jest ortonomalna względem iloczynu skalarnego, zatem

$$\begin{aligned}
g(\partial_\varphi, \partial_\varphi) &= \sin^2\varphi \sin^2\vartheta + \cos^2\varphi \sin^2\vartheta = \sin^2\vartheta \\
g(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta) &= \cos^2\varphi \cos^2\vartheta + \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1 \\
g(\partial_\vartheta, \partial_\varphi) &= -\sin\varphi \sin\vartheta \cos\varphi \cos\vartheta + \cos\varphi \sin\vartheta \sin\varphi \cos\vartheta = 0
\end{aligned}$$

Macierz iloczynu skalarnego w bazie $(\partial_\varphi, \partial_\vartheta)$ ma postać

$$\begin{bmatrix} \sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jest to jednocześnie macierz odwzorowania z $\mathsf{T}_{(\varphi,\vartheta)}S^2$ do $\mathsf{T}^*_{(\varphi,\vartheta)}S^2$. Według tego odwzorowania

$$G(\partial_\varphi) = \sin^2\vartheta\, \mathsf{d}\varphi, \qquad G(\partial_\vartheta) = \mathsf{d}\vartheta.$$

♣

Mamy teraz wystarczającą wiedzę, aby zapisać definicję gradientu na dowolnej powierzchni z iloczynem skalarnym. Uwaga!!! Gradient ma sens jedynie w obecności iloczynu skalarnego !!!

Definicja 5 Niech S będzie powierzchnią z iloczynem skalarnym g. *Gradientem* funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ w punkcie x nazywamy wektor styczny $G^{-1}(\mathsf{d}f(x))$. Możemy także zdefiniować pole wektorowe $\operatorname{grad} f$ wzorem

$$\operatorname{grad} f = G^{-1} \circ \mathsf{d}f$$

Przykład 3 Gradient funkcji f na sferze z indukowanym iloczynem skalarnym wyraża się wzorem

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial f}{\partial\varphi} \partial_\varphi + \frac{\partial f}{\partial\vartheta} \partial_\vartheta$$

♣

Te pola fizyczne, które mają potencjał skalarny, czyli są gradientami funkcji, często lepiej jest traktować jako pola kowektorowe (rożniczkę funkcji) niż gradient. W elektrodynamice klasycznej pole elektryczne jest zdecydowanie polem kowektorowym, czyli jednoformą. Większość rachunków związanych z takim polem wykonuje się łatwiej z użyciem form niż wektorów.