Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

11 listopada 2013

1 Alternatywne spojrzenie na wektory styczne

Definicja 1 *Algebrą* nazywamy przestrzeń wektorową $\mathcal{A}$ wyposażoną w działanie $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, zwane zazwyczaj mnożeniem, które jest liniowe ze względu na każdy argument.

Algebra jest pojęciem bardzo ogólnym. Często dodaje się do niej rozmaite doprecyzowujące przymiotniki: algebra łączna oznacza, że mnożenie ma własność łączności, algebra z jedynką oznacza, że w algebrze jest element neutralny ze względu na mnożenie, algebra Liego oznacza, że mnożenie jest antysymetryczne i spełnia dodatkowy warunek nazywany tożsamością Jacobiego... itd. Jak w przypadku każdej struktury algebraicznej mówimy o homomorfizmach algebr, czyli liniowych odwzorowaniach zachowujących strukturę algebry. W świecie algebr są też inne ważne odwzorowania

Definicja 2 Niech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ będą algebrami i niech $\rho:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ będzie homomorfizmem algebr. Odwzorowanie liniowe $D:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ nazywamy *różniczkowaniem* nad homomorfizmem ρ jeśli spełniony jest warunek

$$D(a_1a_2)=D(a_1)\rho(a_2)+\rho(a_1)D(a_2).$$

Z całą pewnością spotkali sie już państwo z takim odwzorowaniem. Jeśli $\mathcal{A}=\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ oznacza algebrę różniczkowalnych funkcji rzeczywistych, $\mathcal{B}$ jest po prostu $\mathbb{R}$ a homomorfizm ρ oznacza ewaluację funkcji w punkcie $x_0\in\mathbb{R}$, to obliczanie pochodnej funkcji w punkcie x_0 jest różniczkowaniem. Istotnie, zgodnie z regułą Leibniza mamy

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Jeśli teraz $\mathcal{A}=\mathcal{C}^\infty(A)$ dla przestrzeni afinicznej A, $\mathcal{B}=\mathbb{R}$ a ρ jest jak poprzednio ewaluacją funkcji w punkcie a, to każda krzywa γ przechodząca przez a dla $t=0$ definiuje różniczkowanie algebry $\mathcal{C}^\infty(A)$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Istotnie, jeśli $D_\gamma(f)=(f\circ\gamma)'(0)$ to

$$D_\gamma(fg)=((fg)\circ\gamma)'(0)=f(\gamma(0))(g\circ\gamma)'(0)+g(\gamma(0))(f\circ\gamma)'(0)=f(a)D_\gamma(g)+g(a)D_\gamma(f)$$

W powyższych rachunkach zrobiliśmy użytek z przemienności algebry funkcji nie dbając o kolejność mnożenia. Oczywiście różne krzywe mogą definiować to samo różniczkowanie, precyzyjniej krzywe, które maja ten sam wektor styczny definiują to samo rożniczkowanie.

Wniosek 1 *Wektory styczne w punkcie a są różniczkowaniami algebry funkcji gładkich na A.*

Powstaje teraz pytanie czy każde różniczkowanie jest tej postaci? Okazuje się, że tak. Żeby to stwierdzić potrzebujemy pewnego lematu dotyczącego funkcji na $\mathbb{R}^n$:

Lemat 1 (O funkcjach znikających w punkcie) *Niech f będzie funkcją gładką na otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu $0 \in \mathbb{R}^n$. Niech także $f(0) = 0$. Wówczas $f(x) = x^i g_i(x)$ dla pewnych funkcji gładkich g_i.*

Dowód: Ustalmy $x \in \mathcal{O}$ i zdefiniujmy

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(t) = f(0 + tx).$$

Odcinek I jest na tyle duży, żeby zawierać 0 i 1. Funkcja F jest gładka, gdyż funkcja f jest gładka, wiadomo także, że $F(0) = 0$. Zgodnie z podstawowym twierdzeniem rachunku różniczkowego i całkowego

$$F(1) = \int_0^1 F'(s)\, ds, \qquad F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)x^i.$$

Możemy więc napisać równość

$$f(x) = F(1) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)x^i\, ds = x^i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)\, ds = x^i g_i(x)$$

dla

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(sx)\, ds.$$

Skoro funkcja f jest gładka, to funkcje g_i także są gładkie (twierdzenia o całkach z parametrem). $\square$

Teraz możemy już udowodnić, że

Fakt 1 *Dla każdego różniczkowania D algebry $\mathcal{C}^\infty(A)$ w punkcie a istnieje krzywa γ taka, że $D(f) = (f \circ \gamma)'(0)$.*

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że jeśli algebry o których mowa są algebrami z jedynką, to różniczkowanie znika na elementach proporcjonalnych do jedynki. Istotnie

$$D(1_\mathcal{A}) = D(1_\mathcal{A} \cdot 1_\mathcal{A}) = \rho(1_\mathcal{A})D(1_\mathcal{A}) + (1_\mathcal{A})\rho(1_\mathcal{A}) = 1_\mathcal{B} D(1_\mathcal{A}) + D(1_\mathcal{A})1_\mathcal{B} = 2D(1_\mathcal{A}).$$

Skoro więc $D(1_\mathcal{A}) = 2D(1_\mathcal{A})$ to oczywiści $D(1_\mathcal{A}) = 0$ i z liniowości $D(\lambda 1_\mathcal{A}) = 0$. Jedynką w algebrze funkcji na A jest funkcja stała równa 1. Nasze różniczkowanie D znika więc na funkcjach stałych.

W dalszym ciągu używać będziemy afinicznego układu współrzędnych na A zadanego przez bazę (e_i) w przestrzeni modelowej V oraz punkt a, tzn.

$$\mathbb{R}^n \ni (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto b = a + x^i e_i \in A.$$

Funkcje na A można zapisywać jako funkcje na $\mathbb{R}^n$ składając z powyższym odwzorowaniem. Współrzędne x^i dobrze jest traktować jak funkcje na A. Jeśli (ϵ^i) jest bazą dualną do (e_i) to

$$x^i(b) = \epsilon^i(b - a).$$

W otoczeniu punktu a (we współrzędnych punkt 0) funkcję gładką można zapisać w myśl lematu jako

$$f(b) = f(a) + x^i(b)g_i(b).$$

Wtedy

$$D(f) = D(f(a) + x^i g_i) = D(x^i g_i) = x^i(a)D(g_i) + D(x^i)g_i(a) = D(x^i)g_i(a). \quad (1)$$

Wartość D na f zdeterminowana jest więc poprzez układ n liczb $v^i = D(x^i)$ będących wartościami D na funkcjach współrzędnościowych. Łatwo teraz zaproponować krzywą γ taką, że $D_\gamma = D$, mianowicie $\gamma(t) = a + tv^i e_i$. Istotnie

$$D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}(f(a + tv^i e_i)) = \frac{d}{dt}(f(a) + x^i(a + tv^i e_i)g(a + tv^i e_i)) = \\ v^i g_i(a) + x^i(a)g_i'(a)(v^j e_j) = v^i g_i(a) \quad (2)$$

Wyniki (1) i (2) są jednakowe (z uwzględnieniem oznaczeń), co pokazuje, że $D = D_\gamma$.$\square$

W ten sposób znaleźliśmy w końcu jakieś nieprzypadkowe źródło struktury wektorowej w przestrzeni stycznej – różniczkowania algebry tworzą przestrzeń wektorową! Posługując sie tymi samymi metodami wykazać można łatwo podobny fakt dotyczący algebry funkcji na powierzchni i przestrzeni $\mathsf{T}S$. Wszystkie rachunki wykonywane były na wspołrzędnych, można więc je po prostu przepisać

Fakt 2 *Istnieje kanoniczny izomofrizm miedzy przestrzenią różniczkowań algebry $\mathcal{C}^\infty(S)$ nad ewaluacją w punkcie x a przestrzenią styczną $\mathsf{T}_x S$.*

Niech X będzie polem wektorowym na powierzchni S. Wartość pola w punkcie $x \in S$ jest różniczkowaniem algebry funkji - w działanu na funkcje zwraca liczbę. Zbierając te liczby punkt po punkcie w S otrzymujemy funkcję na S. Innymi słowy, działając polem wektorowym na funkcję na S otrzymujemy funkcję na S. Reguła Leibniza obowiązująca w punkcie przenosi się na regułę Leibniza dla działania pól na funkcjach. Pola działają na funkcjach jak różniczkowania. Odpowiedni homomorfizm algebr to tym razem identyczność. Ponieważ wszystkie różniczkowania nad ewaluacją w punkcie to wektory styczne, łatwo jest wykazać fakt

Fakt 3 *Istnieje jednoznaczna odpowiedniość między różniczkowaniami algebry $\mathcal{C}^\infty(S)$ nad identycznością i gładkkimi polami wektorowymi $\mathcal{X}(S)$ na powierzchni S.*

Dowód: Działanie pola wektorowego X na funkcji f dane jest wzorem $(Xf)(x) = X(x)f$. Rachunkiem sprawdzamy, że wzór ten określa różniczkowanie. Niech teraz D będzie różniczkowaniem algebry $\mathcal{C}^\infty(S)$ nad identycznością. Wówczas złożenie $\rho_x \circ D$ jest różniczkowaniem tej algebry nad ewaluacją w punkcie x. Istotnie,

$$\rho_x \circ D(fg) = \rho(x)(D(fg)) = \rho_x(fD(g) + gD(f)) = \\ f(x)D(g)(x) + g(x)D(f)(x) = f(x)\rho_x \circ D(g) + g(x)\rho_x \circ D(f).$$

Zatem $\rho(x) \circ D$ jest wektorem stycznym zaczepionym w punkcie x i można zdefiniować odwzorowanie

$$X_D : \quad S \ni x \longmapsto \rho_X \circ D \in \mathsf{T}S,$$

które jest polem wektorowym na S. Gładkość pola X_D sprawdzimy działając na funkcje współrzędnościowe (x^i). Wiadomo, że $D(x^i)$ jest funkcją gladką, z drugiej strony $X_D(x^i) = D(x^i) = X^i_D$, gdzie

$$X_D = X^1_D\partial_1 + \cdots + X^k_D\partial_k.$$

Funkcje X^i_D są zatem gładkie, co dowodzi gładkości pola X_D. $\square$

W dalszym ciągu nie będziemy odróżniać w notacji pola wektorowego od różniczkowania z nim związanego.

Definicja 3 Niech D_1 i D_2 będą różniczkowaniami algebry $\mathcal{A}$ nad identycznoscią. Komutatorem różniczkowań D_1 i D_2 nazywamy odwzorowanie $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Fakt 4 *Komutator różniczkowań jest różniczkowniem.*

Dowód: Sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem. $\square$

Z faktów 3 i 4 wynika, że komutator różniczkowań odpowiadających polom wektorowym także jest polem wektorowym. Przeprowadzając stosowny rachunek we współrzędnych stwierdzamy, że jeśli $X = X^i\partial_i$ oraz $Y = Y^i\partial_i$ to

$$[X,Y] = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\partial_j - Y^k\frac{\partial X^j}{\partial x^k}\partial_j.$$

2 Odwzorowanie styczne i cofnięcie formy

W dalszym ciągu przyda nam się jakieś oznaczenie na wektor styczny do krzywej γ w $t = 0$. Do tej pory korzystaliśmy z oznaczenia $\gamma'(0)1$ odnoszącego się do faktu, ze krzywa na powierzchni jest jednocześnie krzywą w przestrzeni afinicznej w której zanurzona jest ta powierzchnia, zatem pochodna odwzorowania $\mathbb{R} \to A$ w punkcie jest odwzorowaniem liniowym z $\mathbb{R}$ do przestrzeni modelowej V. Wektor styczny to para $\gamma(0)$ i wartość pochodnej na „wektorze" $1 \in \mathbb{R}$. W geometrii rożniczkowej przyjęte są dwa oznaczenia: wektor styczny do krzywej γ w $t = 0$ oznaczamy $\dot\gamma(0)$ albo, jeśli jest wygodniej $\mathsf{t}\gamma(0)$. Czasami jest wygodniej użyć innej wartości parametru, piszemy wtedy $\dot\gamma(t)$ lub $\mathsf{t}\gamma(t)$.

Niech M i N będą powierzchniami wymiaru m i n odpowiednio, niech także $F : M \longrightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Oznacza to, jak zwykle, że gładkie sa wyrażenia F w układzie współrzędnych, precyzyjniej, jeśli Φ jest układem współrzednych w oroczeniu $x \in M$ i Ψ układem współrzędnych w otoczeniu $F(x) \in N$, to gładkie ma być odwzorowanie $\Psi\circ F\circ\Phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Zbadamy teraz, jaki związek między wektorami stycznymi i kowektorami na powierzchniach N i M wynika z istnienia odwzorowania F.

Krzywą $\gamma : I \to M$ złożyć można z odwzorowaniem F otrzymując krzywą w N. **Uwaga**: jeśli dwie krzywe γ_1 i γ_2 w M mają ten sam wektor styczny, to także krzywe $F\circ\gamma_1$ i $F\circ\gamma_2$ w N mają ten sam wektor styczny. Można to łatwo sprawdzić badając różniczkowania odpowiadające tym krzywym. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ mamy

$$D_{F\circ\gamma_1}(f) = (f\circ F\circ\gamma_1)'(0) = \cdots$$

Na powyższy napis można też patrzeć jak na działanie różniczkowania D_{γ_1} na funkcję $f\circ F$ określona na M. Różniczkowanie to jest takie samo jak różniczkowanie D_{γ_2}. Wobec tego

$$\cdots = (f\circ F\circ\gamma_2)'(0) = D_{F\circ\gamma_2}(f).$$

Z dowolności funkcji f wynika, że różniczkowania $D_{F\circ\gamma_1}$ i $D_{F\circ\gamma_2}$ są równe, odpowiadające im wektory styczne też. Ma sens zatem następująca definicja:

Definicja 4 Odwzorowanie

$$\mathsf{T}F : \mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}N, \qquad \mathsf{T}F(\mathsf{t}\gamma(0)) = \mathsf{t}(F\circ\gamma)(0).$$

nazywamy *odwzorowaniem stycznym* do F.

Tym razem użyliśmy oznaczenia $\mathsf{t}\gamma(0)$ na wektor styczny do krzywej γ w punkcie 0, gdyż stawianie kropki nad złożeniem $F\circ\gamma$ jest niewygodne. Oznaczenie $\mathsf{t}\gamma(0)$ jet szczególnie przydatne, gdy krzywa definiująca wektor sama ma skomplikowaną i długą definicję. Odwzorowanie styczne obcięte do przestrzeni stycznej w jednym punkcie jest odwzorowaniem liniowym, elementem $L(\mathsf{T}_xN, \mathsf{T}_{F(x)}M)$.

Przykład 1 Niech $M = S^2$ będzie sferą dwuwymiarową zaś $N = \mathbb{R}^2$ płaszczyzną. Odwzorowanie F przyporządkowuje punktwi na sferze rzut stereograficzny punktu względem bieguna północnego. Odwzorowanie F zapiszemy we współrzędnych przyjmując współrzędne sferyczne (φ,ϑ) na S^2 i współrzędne kartezjańskie (X,Y) na $\mathbb{R}^2$.

$$F(\varphi,\vartheta) = (\cot\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi,\ \cot\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi),$$

Używamy tutaj oznaczenia F na odwzorowanie wyrażone we współrzędnych zamiast $\Psi\circ F\circ\Phi^{-1}$, co jest w geometrii różniczkowej przyjętą praktyką. Znajdziemy obrazy wektorów stycznych ∂_φ, ∂_ϑ. Wektory te są styczne do krzywych $\gamma_\varphi(t) = (\varphi+t,\vartheta)$, $\gamma_\vartheta(t) = (\varphi,\vartheta+t)$. Obrazy wektorów ∂_φ i ∂_ϑ są styczne do krzywych

$$F\circ\gamma_\varphi(t) = (\cot\frac{\vartheta}{2}\cos(\varphi+t), \cot\frac{\vartheta}{2}\sin(\varphi+t)), \quad F\circ\gamma_\vartheta(t) = (\cot\frac{\vartheta+t}{2}\cos\varphi, \cot\frac{\vartheta+t}{2}\sin\varphi).$$

Różniczkując współrzędne po parametrze t otrzymujemy wyrażenia na $\mathsf{T}F(\partial_\varphi)$, $\mathsf{T}F(\partial_\vartheta)$

$$\begin{aligned}\mathsf{T}F(\partial_\varphi) &= -\cot\frac{\vartheta}{2}\sin(\varphi)\,\partial_X + \cot\frac{\vartheta}{2}\cos(\varphi)\,\partial_Y,\\ \mathsf{T}F(\partial_\vartheta) &= -\frac{1}{2\sin\vartheta/2}\cos(\varphi)\,\partial_X - \frac{1}{2\sin\vartheta/2}\sin(\varphi)\,\partial_Y.\end{aligned}$$

Macierz odwzorowania liniowego $\mathsf{T}F$ z $\mathsf{T}_{(\varphi,\vartheta)}S^2$ do $\mathsf{T}_{F(\varphi,\vartheta)}$ w bazach pochodzących od układów współrzędnych to

$$\begin{bmatrix} -\cot\frac{\vartheta}{2}\sin(\varphi) & -\frac{1}{2\sin\vartheta/2}\cos(\varphi) \\ \cot\frac{\vartheta}{2}\cos(\varphi) & -\frac{1}{2\sin\vartheta/2}\sin(\varphi)\end{bmatrix} \tag{3}$$

Wyrazy macierzowe sa funkcjami współrzednych, ponieważ w każdym punkcie odwzorowanie styczne jest inne. Wartości $\mathsf{T}F$ są wektorami na $\mathbb{R}^2$, więc czasami możemy chcieć wyrazić współczynniki przy wektorach bazowych także we współrzędnych (X,Y)

$$\begin{aligned}\mathsf{T}F(\partial_\varphi) &= -Y\,\partial_X + X\,\partial_Y,\\ \mathsf{T}F(\partial_\vartheta) &= -\frac{X^2+Y^2+1}{2\sqrt{X^2+Y^2}}X\,\partial_X - \frac{X^2+Y^2+1}{2\sqrt{X^2+Y^2}}Y\,\partial_Y.\end{aligned}$$

♣

Przykład 2 Rozważanie działania odwzorowania między powierzchniami na kowektory zaczniemy od dwóch przykładów. Zacznijmy od odwzorowania F z przykładu 1. Funkcje współrzędnościowe X i Y na $\mathbb{R}^2$ definiują funkcje

$$F \circ X(\varphi, \vartheta) = \cot\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi, \quad F \circ X(\varphi, \vartheta) = \cot\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi$$

na S^2. Różniczki tych funkcji są elementami T^*S^2. Możemy więc spróbować zdefiniować wartości odwzorowania kostycznego na rożniczkach wzorami $T^*F(\mathsf{d}X) = \mathsf{d}(F \circ X)$ oraz $T^*F(\mathsf{d}Y) = \mathsf{d}(F \circ Y)$

$$\begin{aligned} T^*F(\mathsf{d}X) &= -\cot\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi\mathsf{d}\varphi - \frac{1}{2\sin\vartheta/2}\cos\varphi\mathsf{d}\vartheta \\ T^*F(\mathsf{d}Y) &= \cot\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi\mathsf{d}\varphi - \frac{1}{2\sin\vartheta/2}\sin\varphi\mathsf{d}\vartheta \end{aligned}$$

Wygląda więc na to, że odwzorowanie kostyczne działa w drugą stronę, z $\mathsf{T}^*_{(X,Y)}\mathbb{R}^2$ do $\mathsf{T}^*_{(\varphi,\vartheta)}S^2$, gdzie punkty (X, Y) i (φ, ϑ) są związane przez odwzorowanie F. W tym przykładzie możemy zebrać odwzorowania kostyczne działające między przestrzeniami w ustaalonych pinktach w jedno odwzorowanie działające z $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^2$ do T^*S^2. Na punktach zaczepienia kowektorów to odwzorowanie działa jak F^{-1}. Co jednak, gdy F nie jest odwracalne? Zastanowimy się nad tym za chwilę badając kolejny przykład. Spójrzmy jeszcze tylko na macierz odwzorowania T^*F działającego z $\mathsf{T}^*_{(X,Y)}\mathbb{R}^2$ do $\mathsf{T}^*_{(\varphi,\vartheta)}S^2$ w bazach złożonych z różniczek współrzędnych

$$\begin{bmatrix} -\cot\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi\mathsf{d}\varphi & \cot\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi\mathsf{d}\varphi \\ -\frac{1}{2\sin\vartheta/2}\cos\varphi & -\frac{1}{2\sin\vartheta/2}\sin\varphi \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Macierze (3) i (4) są wzajemnie transponowane. Użyte bazy w przestrzeniach stycznej i kostycznej są wzajemnie dualne, zatem odpowiednie odwzorowania są sprzeżone, tzn $(\mathsf{T}F)^* = \mathsf{T}^*F$. Zmiana kierunku działania odwzorowania przy sprzężeniu jest zjawiskiem znanym z algebry liniowej.

♣

Przykład 3 Weźmy $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{R}$ i $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G(x, y) = y - x^2$. Odwzorowanie to nie jest odwracalne. Przeciwobraz punktu $r \in \mathbb{R}$ jest podzbiorem $\{(x, y) : y - x^2 = r\}$ w $\mathbb{R}^2$, czyli parabolą o równaniu $y = x^2 + r$. Możemy zapisać odwzorowanie kostyczne miedzy przestrzeniami $\mathsf{T}^*_r\mathbb{R}$ i $\mathsf{T}^*_{(x,y)}\mathbb{R}^2$, jeśli tylko $y = x^2 + r$.

$$\mathsf{T}^*G(\mathsf{d}r) = \mathsf{d}y - 2x\mathsf{d}x,$$

jednak kolekcja tych odwzorowań nie jest odwzorowaniem. Jest to jednak bez wątpienia relacja między $\mathsf{T}^*\mathbb{R}$ a $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^2$.

Definicja 5 Odwzorowanie $F : M \to N$ zdaje relację T^*F między przestrzeniami kostycznymi. Dwa kowektory $\alpha \in \mathsf{T}^*_x M$ i $\beta \in \mathsf{T}^*_y N$ są w relacji jeśli

$$y = F(x) \quad \text{oraz} \quad \forall v \in \mathsf{T}_x N \;\; \alpha(v) = \beta(\mathsf{T}F(v)).$$

Relację tę nazywamy *relacją kostyczną*

Jeśli F nie jest odwracalne relacja kostyczna nie jest odwzorowaniem. Na poziomie punktów zaczepienia „idzie" w tę samą stronę co odwzorowanie F, zaś na poziomie kowektorów w przeciwną. Relacja ta obcięta do przestrzeni $\mathsf{T}^*_q M \times \mathsf{T}^*_{F(q)} N$ jest odwzorowaniem liniowym $(\mathsf{T}F)^*$ sprzężonym do odwzorowania stycznego. W przykładzie 2 używaliśmy nieco innej definicji odwzorowania kostycznego: $\mathsf{T}^*F(\mathsf{d}f) = \mathsf{d}(f \circ F)$. Czy to jest to samo? Wiemy, że każdy kowektor jest rożniczką jakiejś funkcji w punkcie. Niech więc $\beta = \mathsf{d}f(y)$, $f : N \to M$. Czy $\alpha = \mathsf{d}(f \circ F)(x)$ jest w relacji z β zgodnie z definicją? Zakładamy oczywiście, że $y = F(x)$. Niech $v \in \mathsf{T}_x N$, niech także γ będzie krzywą w M taką, że v odpowiada różniczkowaniu D_γ.

$$\alpha(v) = \langle \mathsf{d}(f \circ F)(x), v \rangle = D_\gamma(f \circ F) = (f \circ F \circ \gamma)'(0) = D_{F \circ \gamma}(f) = \langle \mathsf{d}f(y), \mathsf{T}F(v) \rangle = \beta(\mathsf{T}F(v)).$$

Jak na razie relacja kostyczna wydaje się nieco dziwniejszym obiektem niż odwzorowanie styczne. Jednak jeśli zaczniemy działać nie na pojedynczych wektorach czy kowektorach ale na polach wektorowych i formach relacja kostyczna ta okaże się dużo przyjemniejsza w obsłudze. Od tego zaczniemy kolejny wykład.