Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

12 listopada 2013

1 Odwzorowanie styczne i cofnięcie formy

cd:

1.1 Transport pola wektorowego i cofnięcie formy

W poprzednim paragrafie zdefiniowaliśmy odwzorowanie styczne i relacje kostyczną. Sprawdźmy jak działają one nie tylko na pojedyncze wektory i kowektory ale na pola wektorowe i formy. Niech $F : M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Zauważmy, że jeśli $y = F(x)$ to dla $\beta_y \in \mathsf{T}^*_y N$ istnieje dokładnie jeden kowektor w $\mathsf{T}^*_x M$ będący w relacji kostycznej z β. Wynika to z faktu, ze relacja kostyczna obcięta do przestrzeni kostycznych w punktach x i $y = F(x)$ jest odwzorowaniem liniowym (sprzężonym do $\mathsf{T}F$). Jeśli więc β jest jednoformą na N, to wzór

$$M \ni x \longmapsto \mathsf{T}^*F(\beta(F(x))) \in \mathsf{T}^*M \tag{1}$$

określa jednoformę na M. Zobaczmy jak to wygląda na diagramie

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}^*M \arrow[d, dotted, "\pi_M"'] & \mathsf{T}^*N \arrow[l, "\mathsf{T}^*F"'] \arrow[d, dotted, "\pi_N"] \\
M \arrow[u, bend left, "F^*\beta"] \arrow[r, "F"] & N \arrow[u, bend right, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Definicja 1 Jednoformę zadaną wzorem (1) oznaczać będziemy $F^*\beta$ i nazywać *cofnięciem formy* β przez odwzorowanie F. Zamiast „cofnięcie” mówi się też czasami „pull-back”.

Szczegónie prosto wyglada wzór na cofnięcie jednoformy, która jest różniczką funkcji

$$F^*\mathsf{d}f = \mathsf{d}(f \circ F).$$

Gdybyśmy funkcję $f \circ F$ oznaczyli F^*f i nazwali cofnięciem funkcji, moglibyśmy stwierdzić, że cofnięcie jest przemienne z braniem różniczki $F^*\mathsf{d}f = \mathsf{d}(F^*f)$.

Nieco gorzej ma się sprawa z polami wektorowymi. Odwzorowanie styczne działa „z lewej do prawej”

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}M \arrow[r, "\mathsf{T}F"] \arrow[d, dotted, "\tau_M"'] & \mathsf{T}N \arrow[d, dotted, "\tau_N"] \\
M \arrow[u, bend left, "X"] \arrow[r, "F"] & N \arrow[u, bend right, "?"']
\end{tikzcd}$$

i jeśli istnieją $x_1 \neq x_2$ takie, że $F(x_1) = F(x_2)$ to może się zdarzyć, że $\mathsf{T}F(X(x_1)) \neq \mathsf{T}F(X(x_2))$. W takim przypadku pola X nie można przetransportować z M do N. Każde pole wektorowe da się przetransportować jedynie gdy F jest dyfeomorfizmem:

$$F_*X(y) = \mathsf{T}F(X(F^{-1}(y))). \tag{2}$$

Jeśli F nie jest dyfeomorfizmem dają się (czasami) przetransportować niektóre pola. Na przykład jeśli $F : \mathbb{R}^2 \to R$, $F(x, y) = x$ to transport istnieje dla pól postaci $X = f(x)\partial_x + g(x, y)\partial_y$. Wtedy $F_*X = f(x)\partial_x$.

Definicja 2 Pole wektorowe zdefiniowane wzorem (2) nazywamy *transportem pola X* przez odwzorowanie F. Zamiast „transport” mówi się też czasami „popchniecie” lub „push-forward”.

2 Wielokowektory i wieloformy na powierzchni

Poniższe notatki powstały z użyciem notatek do wykładów Matematyka II i Matematyka III, więc mogą Państwo mieć czasami wrażenie, że autor niepotrzebnie rozdziela włos na czworo. Z drugiej strony jednak „wykładanie kawy na ławę” ma też swoje zalety...

Definicja 3 Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. *Formą k-liniową* nazywamy odwzorowanie:

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe ze względu na każdy argument, tzn. dla każdego i, dowolnych wektorów v_j, $j = 1 \dots k$, v_i' i dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\omega(v_1, v_2, \cdots, \lambda v_i + \mu v_i', \cdots, v_k) = \lambda\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + \mu\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i', \cdots, v_k)$$

Z kursu algebry i analizy znają państwo dobrze formy dwuliniowe, szczególnie dwuliniowe symetryczne (np. iloczyn skalarny, druga pochodna funkcji wielu zmiennych obliczona w ustalonym punkcie, tensor bezwładności ciała sztywnego...).

Wśród wszystkich form k-linowych wyróżnimy teraz szczególnie funkcje *antysymetryczne*, to znaczy mające własność

$$\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i, \dots, v_j, \cdots, v_k) = -\omega(v_1, v_2, \cdots, v_j, \dots, v_i, \cdots, v_k) \tag{3}$$

dla dowolnych $i \neq j$. Formy k-liniowe antysymetryczne nazywane są też *k-formami antysymetrycznymi*, lub *k-kowektorami.*

Omawiając odwzorowania liniowe i formy dwuliniowe stwierdziliśmy, że własność liniowości powoduje, że odwzorowanie jest jednoznacznie określone przez wartości na wektorach bazowych. Stąd na przestrzeni n-wymiarowej do zdefiniowania formy dwuliniowej potrzeba n^2 liczb:

$$Q : V \times V \to \mathbb{R}, \quad Q_{ij} = Q(e_i, e_j).$$

Jeśli wiadomo, że forma jest symetryczna, wtedy wystarczy $n(n+1)/2$ wartości. Jeśli forma jest antysymetryczna potrzeba jeszcze mniej $n(n-1)/2$, gdyż wyrazy diagonalne Q_{ii} muszą być zero: z warunku antysymetrii wynika, że dla dowolnego $v \in V$

$$Q({\color{red}v}, {\color{blue}v}) = -Q({\color{blue}v}, {\color{red}v})$$

Po opuszczeniu kolorów (w końcu ${\color{red}v}$ i ${\color{blue}v}$ to ostatecznie ten sam wektor v) dostajemy

$$Q(v, v) = -Q(v, v), \tag{4}$$

czyli $Q(v, v) = 0$. Innymi słowy przestrzeń wektorowa wszystkich form dwuliniowych ma wymiar n^2 a podprzestrzenie form symetrycznych i antysymetrycznych wymiary odpowiednio $n(n+1)/2$ i $n(n-1)/2$. Jeśli zauważymy ponadto, że forma, która jest jednocześnie symetryczna i antysymetryczna musi być zerowa, oraz że

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2$$

zrozumiemy, że przestrzeń wszystkich form dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni form symetrycznych i podprzestrzeni form antysymetrycznych. Każda forma dwuliniowa da się więc rozłożyć w sposób jednoznaczny na część symetryczną i antysymetryczną:

$$Q(v, w) = Q_-(v, w) + Q_+(v, w)$$

$$Q_-(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) - Q(w, v)], \quad Q_+(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) + Q(w, v)].$$

Dla $k > 2$ także jest prawdą, że forma k-liniowa jest jednoznacznie określona przez wartości na bazie, zatem przestrzeń takich odwzorowań jest przestrzenią wektorową wymiaru n^k. W tej przestrzeni są także wyróżnione podprzestrzenie form symetrycznych i antysymetrycznych, których częścią wspólną jest przestrzeń zerowa, ale podprzestrzenie te nie wyczerpują przestrzeni wszystkich form. Zastanówmy się nad wymiarem przestrzeni $\bigwedge^k V^*$ form antysymetrycznych (pochodzenie dziwnego oznaczenia $\bigwedge^k V^*$ wyjaśni się wkrótce) . Niech ω oznacza formę antysymetryczną. W zbiorze n^k liczb

$$\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$$

jest wiele zer. Wystarczy, że w układzie $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ kórykolwiek wektor bazowy powtarza się, a już wartość ω na tym układzie musi być równa zero jak w (4). Jeśli zaś układ $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ nie zawiera powtarzających się wektorów, to wartość ω na tym układzie różni się od wartości ω na układzie zawierającym te same wektory tylko uporządkowane rosnąco ze względu na indeks, tylko znakiem. **Wniosek:** do zdefiniowania k-formy wystarczy tyle liczb ile jest różnych podzbiorów k-elementowych w zbiorze n-elementowym. Sięgając do wiedzy z zakresu kombinatoryki stwierdzamy, że jest ich

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{tzn.} \quad \dim \bigwedge^k V^* = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Powyższe rozważania prowadzą także do wniosku, że przestrzeń k-form antysymetrycznych dla $k > n$ jest zerowa, natomiast przestrzeń n-form ma wymiar równy 1. Znamy już przynajmniej jeden przykład n-kowektora: Jeśli kolumny macierzy potraktujemy jak elementy $\mathbb{R}^n$ wyznacznik jest n-kowektorem na $\mathbb{R}^n$. Podsumujmy teraz własności k-kowektorów. W poniższych wypowiedziach α jest k-kowektorem:

- Jeśli wśród argumentów α którykolwiek z wektorów powtarza się, wartość α na tym układzie wektorów jest równa zero. Wynika z tego, że
- jeśli $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jest układem liniowo-zależnym to $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$.
- Jak każde odwzorowanie liniowe α jest jednoznacznie określone na wektorach bazowych. Jeśli $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ jest bazą w V to liczby

  $$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}), \qquad 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n+1$$

  wyznaczają jednoznacznie odwzorowanie α. Wynika z tego, że
- $\dim \bigwedge^k V^* = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Skoro znamy już wymiar przestrzeni k-kowektorów, przydałby nam się także jakaś wygodna baza. Jako narzędzie do konstrukcji takiej bazy posłuży następujące pojęcie:

Definicja 4 *Iloczynem zewnętrznym* k-kowektora α i l-kowektora β jest $(k+l)$-kowektor zadany wzorem

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{k!l!} \alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(l+2)}, \ldots, v_{\sigma(l)}).$$

Zanim zastanowimy się nad własnościami iloczynu zewnętrznego przyjrzyjmy się przykładom dla konkretnych (niedużych) k i l. Niech $k = 1$ i $l = 1$, czyli α, β są po prostu kowektorami na V. Wtedy $\alpha \wedge \beta$ jest 2-kowektorem określonym wzorem

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{1!1!} \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}).$$

W grupie permutacji S_2 są tylko dwie permutacje: identyczność (parzysta) i jedna transpozycja $(1\ \ 2)$ (nieparzysta). Wzór przyjmuje więc postać

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1)$$

Teraz załóżmy, że α jest 2-kowektorem a β kowektorem. Potrzebujemy więc permutacji z S_3. W tej grupie jest sześć permutacji: trzy transpozycje $(1\ \ 2)$, $(1\ \ 3)$, $(2\ \ 3)$ (nieparzyste), dwa cykle $(1\ \ 2\ \ 3)$, $(1\ \ 3\ \ 2)$ i identycznosć. Wzór na iloczyn zewnętrzny przyjmuje postać:

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2!1!} \big(+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) - \alpha(v_3, v_2)\beta(v_1)$$
$$+\alpha(v_3, v_1)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1) \big) =$$

Wyrazy zaznaczone tym samym kolorem różnią się jedynie kolejnością argumentów 2-kowektora α. Po uporządkowaniu można je dodać. Trzeba jedynie pamiętać o zmianie znaku przy zamianie kolejności argumentów:

$$= \frac{1}{2!1!}\left(+\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3)+\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3)-\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2)\right.$$
$$\left.+\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1)-\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2)+\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1)\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(+2\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3)-2\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2)+2\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1)\right)=$$
$$\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3)-\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2)+\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1).$$

Ostatecznie

$$\alpha\wedge\beta(v_1,v_2,v_3)=\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3)-\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2)+\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1).$$

Jako ostatniej przyjrzyjmy się sytuacji kiedy oba czynniki iloczynu zewnętrznego są 2-kowektorami. Potrzebujemy teraz permutacji z S_4. Poprzedni przykład pokazuje, że istotny jest jedynie podział argumentów między czynniki. Argumenty jednego 2-kowektora porządkujemy rosnąco dodając podobne składniki. W tym przypadku mamy sześć możliwych podziałów zbioru indeksów $\{1,2,3,4\}$ pomiedzy 2-kowektory α i β:

$$\begin{aligned}
\{1,2,3,4\}&=\{1,2\}\cup\{3,4\}\\
\{1,2,3,4\}&=\{1,3\}\cup\{2,4\}\\
\{1,2,3,4\}&=\{1,4\}\cup\{2,3\}\\
\{1,2,3,4\}&=\{2,3\}\cup\{1,4\}\\
\{1,2,3,4\}&=\{2,4\}\cup\{1,3\}\\
\{1,2,3,4\}&=\{3,4\}\cup\{1,2\}.
\end{aligned}$$

Argumenty z indeksami z pierwszego zbioru będziemy wstawiac do α a z drugiego do β. Pierwszemu z podziałów odpowiadają cztery możliwe permutacje:

$$\mathrm{id}\,,\quad (1\ \ 2),\quad (3\ \ 4),\quad (1\ \ 2)(3\ \ 4)$$

Pierwsza i ostatnia są parzyste, druga i trzecia nieparzyste. Permutacje te mieszają indeksy w ramach podziału, a nie między zbiorami podziału. Wkład od tych czterech permutacji do wzoru na iloczyn $\alpha\wedge\beta$ jest następujący

$$+\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4)-\alpha(v_2,v_1)\beta(v_3,v_4)-\alpha(v_1,v_2)\beta(v_4,v_3)+\alpha(v_2,v_1)\beta(v_4,v_3)$$

Po uporządkowaniu rosnąco argumentów obu 2-kowektorów otrzymujemy wkład

$$+4\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4).$$

Podobnie analizując każdy z możliwych podziałów i odpowiadające każdemu cztery permutacje dostaniemy wzór

$$\alpha\wedge\beta(v_1,v_2,v_3,v_4)=\frac{1}{2!2!}\left(4\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4)-4\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2,v_4)+4\alpha(v_1,v_4)\beta(v_2,v_3)\right.$$
$$\left.+4\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1,v_4)-4\alpha(v_2,v_4)\beta(v_1,v_3)+4\alpha(v_3,v_4)\beta(v_1,v_2)\right)=$$
$$\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4)-\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2,v_4)+\alpha(v_1,v_4)\beta(v_2,v_3)$$
$$+\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1,v_4)-\alpha(v_2,v_4)\beta(v_1,v_3)+\alpha(v_3,v_4)\beta(v_1,v_2).$$

Zupełnie nieprzypadkowo współczynniki liczbowe za każdym razem się upraszczają. Oto najważniejsze własności ioczynu zewnętrznego:

Fakt 1 *1. Iloczyn zewnętrzny jest operacją dwuliniową, tzn:*

$$(a\alpha + b\alpha') \wedge \beta = a\alpha \wedge \beta + b\alpha' \wedge \beta, \qquad \alpha \wedge (a\beta + b\beta' = a\alpha \wedge \beta + b\alpha \wedge \beta').$$

2. Iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

3. Iloczyn zewnętrzny w ogólności nie jest przemienny, ale zachodzi wzór:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$