Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

17 listopada 2013

1 Wielokowektory i wieloformy na powierzchni

Poprzedni wykład zakończyliśmy na sformułowaniu następującego faktu:

Fakt 1 *1. Iloczyn zewnętrzny jest operacją dwuliniową, tzn:*

$$(a\alpha + b\alpha') \wedge \beta = a\alpha \wedge \beta + b\alpha' \wedge \beta, \qquad \alpha \wedge (a\beta + b\beta' = a\alpha \wedge \beta + b\alpha \wedge \beta').$$

2. Iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

3. Iloczyn zewnętrzny w ogólności nie jest przemienny, ale zachodzi wzór:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

Dowód: Pierwszy warunek wynika bezpośrednio z definicji. Dowód drugiego jest dość nieprzyjemny. Polega na pokazaniu, że lewa i prawa strona obliczona na układzie $k + l + p$ wektorów daje

$$\sum_{\sigma \in S_{k+l+p}} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{k!l!p!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) \gamma(v_{\sigma(k+l+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l+p)}).$$

Istotnie, zajmijmy się najpierw lewą stroną wzoru:

$$[(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma](v_1, \ldots, v_{k+l+p}) = \sum_{\rho \in S_{k+l+p}} \frac{sgn(\rho)}{(k+l)!p!} \ \alpha \wedge \beta(v_{\rho(1)}, \ldots, v_{\rho(k+l}) \ \gamma(v_{\rho(k+l+1)}, \ldots, v_{\rho(k+l+p)})$$

Żeby zrealizować iloczyn zwnętrzny $\alpha \wedge \beta$ musimy teraz wykonać sumowanie po wszystkich permutacjach jego argumentów. Można to zrealizować za pomocą zastosowania wszystkich możliwych permutacji $\sigma \in S_{k+l}$ do argumentów premutacji ρ. Co prawda oznacza to zastosowanie permutacji σ i ρ w odwrotnej kolejności niżby to wynikało ze wzoru definicyjnego iloczynu zewnętrznego, ale ponieważ i tak chodzi o wysumowanie po wszystkich przestawieniach, ostatecznie różnicy nie ma:

$$\sum_{\rho\in S_{k+l+p}} \frac{sgn(\rho)}{(k+l)!p!}\ \alpha\wedge\beta(v_{\rho(1)},\ldots,v_{\rho(k+l)})\ \gamma(v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)}) =$$

$$\sum_{\substack{\rho\in S_{k+l+p}\\ \sigma\in S_{k+l}}} \frac{sgn(\rho)\mathrm{sgn}\,(\sigma)}{(k+l)!p!k!l!}\ \alpha(v_{\rho(\sigma(1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k))})\beta(v_{\rho(\sigma(k+1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k+l))})$$

$$\gamma(v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)})$$

W zbiorze układów wektorów

$$(v_{\rho(\sigma(1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k))},v_{\rho(\sigma(k+1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k+l))},v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)})$$

to samo uporządkowanie występuje wiele razy. Dla różnych par ρ i σ złożenie $\rho\circ\sigma$ może być takie samo. Traktujemy tutaj permutację $\sigma\in S_{k+l}$ jako element grupy S_{k+l+p} nie ruszający ostatnich p elementów. To samo uporządkowanie (nazwijmy je ω) pojawia się tyle razy, ile jest permutacji σ, gdyż, ustaliwszy σ, odpowiednie ρ obliczymy ze wzoru

$$\rho=\omega\circ\sigma^{-1}.$$

Z własności znaku permutacji wiadomo także, że $sgn(\rho)sgn(\sigma)=sgn(\omega)$. Zamiast sumować więc po permutacjach z S_{k+l+p} i S_{k+l} możemy sumować jedynie po permutacjach z S_{k+l+p} uwzględniając każdą permutację $(k+l)!$ razy:

$$\sum_{\substack{\rho\in S_{k+l+p}\\ \sigma\in S_{k+l}}} \frac{sgn(\rho)\mathrm{sgn}\,(\sigma)}{(k+l)!p!k!l!}\ \alpha(v_{\rho(\sigma(1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k))})\beta(v_{\rho(\sigma(k+1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k+l))})$$

$$\gamma(v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)}) =$$

$$\sum_{\omega\in S_{k+l+p}} \frac{sgn(\omega)(k+l)!}{(k+l)!p!k!l!}\alpha(v_{\omega(1)},\ldots,v_{\omega(k)})\beta(v_{\omega(k+1)},\ldots,v_{\omega(k+l)})\gamma(v_{\omega(k+l+1)},\ldots,v_{\omega(k+l+p)}) =$$

$$\sum_{\omega\in S_{k+l+p}} \frac{sgn(\omega)}{p!k!l!}\alpha(v_{\omega(1)},\ldots,v_{\omega(k)})\beta(v_{\omega(k+1)},\ldots,v_{\omega(k+l)})\gamma(v_{\omega(k+l+1)},\ldots,v_{\omega(k+l+p)}).$$

Podobnie postąpimy s prawą stroną wzoru. Sumować będziemy po permutacjach $\rho\in S_{k+l+p}$ a następnie $\sigma\in S_{l+p}$ aplikując σ do układu $(k+1,\ldots k+l+p)$. Zauważamy następnie, że σ można traktować jako element S_{k+l+p} nie ruszajacy pierwszych k liczb i że każdy układ wektorów powatarza się z tym samym znakiem $(l+p)!$ razy. W ten sposób dochodzimy do tej samej postaci wzoru po prawej stronie.

Własność trzecia jest na szczęście łatwa do uzasadnienia. Porównajmy dwa wzory:

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\frac{\mathrm{sgn}\,\sigma}{k!l!}\alpha(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\ldots,v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)},v_{\sigma(k+2)},\ldots,v_{\sigma(k+l)}). \qquad (1)$$

i

$$\beta \wedge \alpha = \sum_{\rho \in S_{k+l}} \frac{\operatorname{sgn} \rho}{k!l!} \beta(v_{\rho(1)}, v_{\rho(2)}, \ldots, v_{\rho(l)}) \alpha(v_{\rho(l+1)}, v_{\rho(l+2)}, \ldots, v_{\sigma(l+k)}). \tag{2}$$

W drugim wzorze możemy zamienić α z β, byle zachować argumenty:

$$\beta \wedge \alpha = \sum_{\rho \in S_{k+l}} \frac{\operatorname{sgn} \rho}{k!l!} \alpha(v_{\rho(l+1)}, v_{\rho(l+2)}, \ldots, v_{\sigma(l+k)}) \beta(v_{\rho(1)}, v_{\rho(2)}, \ldots, v_{\rho(l)}). \tag{3}$$

Składniki sumy (1) i (3) różnią sie od siebie tylko znakiem. Różnica w znaku jest taka, jak różnica w znaku permuatacji ρ i σ przy założeniu, że $\sigma(1) = \rho(l+1)$, $\sigma(2) = \rho(l+2)$ itd. aż do $\sigma(k) = \rho(1)$ i dalej $\sigma(k+1) = \rho(1)$ aż do $\sigma(k+l) = \rho(l)$. Te dwie permutacje różnią sie o permutację

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+l \\ l+1 & l+2 & \cdots & l+k & 1 & \cdots & l \end{pmatrix},$$

której znak to dokładnie $(-1)^{kl}$. $\square$

Wspominaliśmy już, że każdy k-kowektor jest zadany przez swoje wartości na układach wektorów bazowych. Wartości te są współrzędnymi k-kowektora w pewnej bazie. Zajdźmy tę bazę. Niech, jak poprzednio, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ będzie bazą w V. Kowektory tworzące baze dualną oznaczymy $(\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^n)$. Wybierzmy teraz k-elementowy zbiór indeksów $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ i uporządkujemy indeksy rosnąco, tzn. $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k$. Interesuje nas k-kowektor

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}.$$

Jeśli w zbiorze I choć jeden indeks powtarza się, to powyższy k-kowektor jest równy zero (zamiana miejscami dwóch czynników powinna powodować zmianę znaku, jednak jeśli czynniki te są jednkowe, tak naprawdę nic się nie zmienia). Możemy więc rozważać tylko takie zbiory indeksów, że $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Obliczmy k-kowektor $\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}$ na układzie wektorów $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ (zakładamy także, że indeksy w tym układzie wektorów są uporządkowane rosnąco):

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon^{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}}) \cdot \cdots \cdot \epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$$

W powyższej sumie albo wszystkie skladniki są równe 0, albo jest tylko jeden niezerowy składnik. Wszystkie składniki są równe zero, jeśli zbiory $\{i_1, \ldots, i_k\}$ i $\{j_1, \ldots, j_k\}$ nie są identyczne. Wtedy zawsze przynajmniej jedna ewaluacja $\epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$ w każdym z iloczynów jest równa 0. Jeśli zbiory indeksów są jednakowe wtedy w powyższej sumie jest jeden niezerowy wyraz dla permutacji identycznościowej (założyliśmy początkowo, że indeksy w obu zbiorach są uporządkowane rosnąco). W takiej sytuacji otrzymujemy

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \epsilon^{i_1}(e_{i_1}) \cdot \epsilon^{i_1}(e_{i_1}) \cdot \cdots \cdot \epsilon^{i_k}(e_{i_k}) = 1$$

Postulujemy, że układ k-kowektorów składający się ze wszystkich iloczynów zewnętrznych k kowektorów bazowych z odpowiednio uporządkowanycmi indeksami jest dobrą bazą w $\bigwedge^k V^*$. Liczba k-kowektorów w powyższym układzie się zgadza, tzn jest ich liczba równa wymiarowi przestrzeni. Ponadto układ ten jest liniowo niezależny: wystrczy obliczyć wartości kombinacji liniowej wektorów z tego układu na wszystkich k elementowych ciągach wektorów bazowych e_i z uporządkowanymi rosnąco indeksami. Na każdym z takich ciągów wartość niezerową ma tylko jeden z k-kowektorów, co daje warunkek znikania współczynnika przy tym właśnie k-kowektorze. Okazuje się, że istotnie badany przez nas układ k-kowektorów jest dobrą bazą. Współrzędne rozważane przez nas wcześniej związane są właśnie z tą bazą. Oznacza to, że każdy k-kowektor α można zapisać jako kombinację liniową

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}$$

Uwaga dotycząca zapisu z użyciem współrzędnych: Często w rachunkach wygodniej jest sumować nie po uporządkowanych zbiorach indeksów a po wszystkich. Rozważmy sprawę dla dwukowektorów. W przyjętym powyżej zapisie

$$\alpha = \sum_{i<j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j,$$

co dla $n = 3$ daje

$$\alpha = \alpha_{12}\, \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \alpha_{13}\, \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + \alpha_{23}\, \epsilon^2 \wedge \epsilon^3.$$

Zdefiniujmy teraz α_{ij} dla $i > j$ warunkiem

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$$

Sprawdźmy (dla $n = 3$) jak sie ma $\sum_{i<1} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j$ do $\sum_{i,j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \alpha_{ij} \epsilon^i \wedge \epsilon^j &= \alpha_{12}\, \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \alpha_{13}\, \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + \alpha_{23}\, \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \alpha_{21}\, \epsilon^2 \wedge \epsilon^1 + \alpha_{32}\, \epsilon^3 \wedge \epsilon^1 + \alpha_{32}\, \epsilon^3 \wedge \epsilon^2 \\
&= (\alpha_{12} - \alpha_{21}) \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + (\alpha_{13} - \alpha_{31}) \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + (\alpha_{23} - \alpha_{32}) \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 \\
&= 2\alpha_{12}\, \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + 2\alpha_{13}\, \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + 2\alpha_{23}\, \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 = 2\alpha
\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\alpha = \sum_{i<j} \alpha_{ij}\, \epsilon^i \wedge \epsilon^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \epsilon^i \wedge \epsilon^j = \sum_{i,j} a_{ij}\, \epsilon^i \wedge \epsilon^j$$

czyli

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}.$$

1.1 Wieloformy na powierzchni.

Jeśli jako przestrzeń wektorową weźmiemy przestrzeń styczną $\mathsf{T}_q M$ do powierzchni M w punkcie q, możemy mówić o wielokowektorach na powierzchni. Mamy wtedy zazwyczaj do dyspozycji bazę w $\mathsf{T}_q M$ pochodzącą od układu współrzędnych oraz dualną do niej bazę w $\mathsf{T}^*_q M$, składającą się z różniczek współrzędnych. Jeśli $(x^1, \dots, x^n)$ oznaczają współrzędne na n-wymiarowej powierzchni M, to k-kowektor w punkcie $q \in M$ jest postaci

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}.$$

Załóżmy teraz, że w każdym punkcie powierzchni M, a przynajmniej w każdym punkcie q pewnego otwartego zbioru $\mathcal{O} \subset M$ zadany jest kowektor $\alpha(q)$. mamy więc odwzorowanie

$$\alpha : \mathcal{O} \longrightarrow \bigwedge^k \mathsf{T}^* M.$$

wymagać będziemy dodatkowo, aby współczynniki $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ zależały od punktu w taki sposób, żeby wyrażone we współrzędnych $(x^1, \ldots, x^m)$ były gładkimi funkcjami tych współrzędnych. W dziedzinie jednego układu współrzędnych możemy napisać

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x^1, \ldots, x^m) \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$$

Odwzorowanie α nazywamy *k-formą* na $\mathcal{O}$.

Przykład 1 Przykładem 1-formy jest różniczka funkcji

$$\mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathsf{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathsf{d}x^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}\mathsf{d}x^m.$$

Różniczka funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ma postać

$$\mathsf{d}f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathsf{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathsf{d}y.$$

i jest określona we wszystkich punktach $\mathbb{R}^2$ poza $(0, 0)$. W punkcie $(0, 0)$ funkcja f nie jest różniczkowalna. Ta sama funkcja zapisana w biegunowym układzie współrzędnych ma postać

$$f(r, \varphi) = r,$$

zatem jej różniczka to po prostu

$$\mathsf{d}f(r, \varphi) = \mathsf{d}r.$$

♣

Przykład 2 Przykładem dwuformy na $\mathbb{R}^2$ jest tzw. forma objętości zorientowanej związana z kanonicznym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^2$ (o formach objętości dokładniej powiemy później)

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

Tę samą formę możemy wyrazić we współrzędnych biegunowych biorąc pod uwagę, że

$$\mathsf{d}x = \cos\varphi \mathsf{d}r - r \sin\varphi \mathsf{d}\varphi, \quad \mathsf{d}y = \sin\varphi \mathsf{d}r + r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi$$

Mnożymy zewnętrznie $\mathsf{d}x$ i $\mathsf{d}y$ wyrażone we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = (\cos\varphi \mathsf{d}r - r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r + r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) = \\ (\cos\varphi \mathsf{d}r) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r) + (\cos\varphi \mathsf{d}r) \wedge (r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) + (-r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r) + \\ (-r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) = \\ \cos\varphi\sin\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}r + r\cos^2\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi - r\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r - r^2 \sin\varphi\cos\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}\varphi\end{aligned}$$

Pierwszy i ostatni składnik są równe zero, ponieważ iloczyn zewnętrzny dwóch identycznych kowektorów jest równy zero. Oznacza to, że

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = r\cos^2\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi - r\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r$$

Korzystając z własności iloczynu zewnętrznego piszemy

$$\mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r = -\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi,$$

zatem ostatecznie

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = (r\cos^2\varphi + r\cos^2\varphi)\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi = r\,\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi.$$

♣

2 Różniczka zewnętrzna.

Używaliśmy już specjalnego oznaczenia na zbiór gładkich cięć wiązki stycznej ($\mathcal{X}(M)$). Wygodnie jest także wprowadzić oznaczenie $\Omega^k(M)$ na zbiór gładkich cięć wiązki k-kowektorów: $\wedge^k\pi_M : \wedge^k\mathsf{T}^*M \to M$. Wygodnie jest także uważać, że $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ oraz iloczyn zewnętrzny 0-formy i k-formy to po prostu mnożenie k-formy przez funkcję.

Fakt 2 *Operator liniowy*

$$\mathsf{d} : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

spełniający następujące warunki: (1) d *w działaniu na 0-formy jest równy zdefiniowanej wcześniej różniczce funkcji; (2) jeśli* $\alpha \in \Omega^k(M)$ *i* $\beta \in \Omega^l(M)$ *to* $\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k\alpha \wedge \mathsf{d}\beta$*; (3)* $\mathsf{d}^2 = 0$*, tzn* $\mathsf{d}(\mathsf{d}\alpha) = 0$ *dla dowolnej formy* α*, jest wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód: Załóżmy, że operator d istnieje. Wówczas warunek (2) pozwala go zadać jedynie na 0-formach i 1-formach, ponieważ wszystkie inne wyprodukujemy korzystając z liniowości i reguły Leibniza (czyli właśnie warunku (2)). Na 0-formach wartość d jest określona przez warunek (1). Każda 1-forma jest kombinacją liniową wyrażeń postaci $f\mathsf{d}g$, gdzie f, g są funkcjami gładkimi. Używając więc (2) i (3) dostajemy

$$\mathsf{d}(f\mathsf{d}g) = \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g + f\mathsf{d}\mathsf{d}g = \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g.$$

□.

Fakt 3 *Operator* d *istnieje.*

Dowód: W dziedzinie $\mathcal{O}$ lokalnego układu współrzędnych (x^i) działanie d zadamy wzorem „we współrzędnych”. Ze względu na liniowość wystarczy wiedzieć jak działa d na formę α postaci $a(x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$:

$$\mathsf{d}(a(x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}) = \mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^j}\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}.$$

Pozostaje sprawdzić własności (1)-(3). Warunek (1) jest spełniony automatycznie, warunek (2) sprawdzamy rachunkiem: Weźmy

$$\alpha = a\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}, \qquad \beta = b\mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l},$$

gdzie a i b są funkcjami we współrzędnych (x^i), wtedy

$$\alpha \wedge \beta = ab\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}.$$

Aplikujemy operator d:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{d}(ab) \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
(a\mathsf{d}b + b\mathsf{d}a) \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
a\mathsf{d}b \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} + \\
b\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
\left(\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}\right) \wedge \left(b\mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}\right) + \\
(-1)^k \left(a\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}\right) \wedge \left(\mathsf{d}b \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}\right) = \\
\mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathsf{d}\beta
\end{aligned}$$

Pozostaje do sprawdzenia warunek (3). Wystarczy go sprawdzić dla funkcji:

$$\mathsf{dd}f = \mathsf{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathsf{d}x^i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right)\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = 0$$

Ostatnia równość wynika z równości drugich pochodnych cząstkowych mieszanych dla funkcji gładkich. Zachowania za względu na zamianę zmiennych nie musimy sprawdzać, gdyż mamy jednoznaczność □