Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

28 listopada 2013

1 Różniczka zewnętrzna, c.d.

Zanim zagłębimy się dalej w teorię policzmy dwa przykłady:

Przykład 1 Znaleźć $\mathsf{d}\beta$, jeśli $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(xz\mathsf{d}x + yz\mathsf{d}y - (x^2+y^2)\mathsf{d}z\Big)$$

♣

Przykład 2 Znaleźć $\mathsf{d}\omega$, jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

$$\omega = \frac{x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x}{x^2+xy+y^2}$$

♣

Przy okazji powyższych rachunków okazało się, że istnieją niezerowe (i całkiem skomplikowane) formy, których różniczka jest zero. Używać będziemy następujących nazw: jeśli $\mathsf{d}\alpha = 0$, to α nazywa się formą *zamkniętą*, jeśli $\alpha = \mathsf{d}\beta$, to α jest formą *zupełną*. Każda forma zupełna jest zamknięta. Czy jest też odwrotnie? Odpowiedź na to pytanie będzie treścią następnego wykładu.

Oprócz wzoru „na współrzędnych" oraz niekonstruktywnej definicji poprzez własności, mamy także wzór na różniczkę formy wyrażoną poprzez jej wartości na układzie pól wektorowych. Wzór ten pokazuje związek różniczkowania form z nawiasem Liego pól wektorowych:

Fakt 1 (Wzór Cartana) *Jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$ oraz $\omega \in \Omega^k(M)$, to*

$$\mathsf{d}\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-1}X^i\omega(X_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1}) + \\ + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1})$$

Dowód: Sprawdźmy przede wszystkim, czy powyższy wzór na $\mathsf{d}\omega$ określa rzeczywiście $k+1$-formę. Na oko widać, że wyrażenie po prawej stronie jest liniowe ze względu na każdy z argumentów, antysymetrię też dość łatwo sprawdzić. Trzeba jeszcze jednak zwrócić uwagę na to, czy wartość prawej strony zależy jedynie od wartości pól w punkcie a nie na przykład także od pochodnych tych pól. Na pierwszy rzut oka pochodne mogą być zaangażowane, gdyż we wzorze występuje nawias pól a także działanie pola na funkcję skonstruowaną z formy i pozostałych pól. Sprawdzić to można na przykład badając jak zachowuje się prawa stona, kiedy jedno z pól pomnożymy przez funkcję. Ze względu na antysymetrię wystarczy pomnożyć pierwsze pole. Jeśli rzeczywiście wzór określa $(k+1)$-formę, to powinniśmy otrzymać wzór

$$\mathsf{d}\omega(fX_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) = f\mathsf{d}\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}), \tag{1}$$

czyli żadnego różniczkowania funkcji!!! Sprawdzamy: Gdy w pierwszej sumie weźmiemy $i=1$, otrzymamy

$$fX_1\omega(X_2, \ldots, X_{k+1}),$$

gdy $i>1$

$$\begin{aligned}(-1)^{i-1}X_i\omega(fX_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1}) = \\ (-1)^{i-1}X_i f\omega(X_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1}) = \\ (-1)^{i-1}\left({\color{red}(X_i f)\omega(X_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1})} + fX_i\omega(X_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1})\right).\end{aligned}$$

Składnik zaznaczony na czerwono jest niepożądany, gdyż zawiera różniczkowanie funkcji f. Sprawdzamy kolejne składniki. W drugiej sumie, gdy $i \neq 1$ mamy

$$\begin{aligned}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], fX_1, \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1}) = \\ (-1)^{i+j}f\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1})\end{aligned}$$

Jeśli jednak $i=1$ to nawias przyjmuje postać

$$[fX_1, X_j] = f[X_1, X_j] - (X_j f)X_1,$$

co po wstawieniu „pod ω" daje

$$\begin{aligned}(-1)^{1+j}\omega(f[X_1, X_j] - (X_j f)X_1, X_2, \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1}) = \\ (-1)^{1+j}f\omega([X_1, X_j], X_2, \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1}) - {\color{red}(-1)^{1+j}(X_j f)\omega(X_1, X_2 \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1})}\end{aligned}$$

Kolejne wyrażenie na czerwono też jest niepożądane, gdyż zawiera różniczkowanie funkcji. Jednak oba czerwone składniki różnią się znakiem (dla $i=j$) zatem uproszczą się w wyrażeniu po prawej stronie wzoru Cartana. Wyrażenie to zależy więc tylko od wartości pól w punkcie a nie w pewnym otoczeniu. Teraz wystarczy tylko sprawdzić, czy wzór ten daje to co trzeba we współrzędnych. W tym celu trzeba obliczyć prawą stronę na polach współrzędnościowych $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Jest to bardzo proste, ponieważ pola współrzędnościowe komutują, znika więc druga suma we wzorze. Dalszy rachunek jest już oczywisty.$\square$

Zobaczmy, jak wygląda różniczka funkcji f, jednoformy η i dwuformy postaci $\mathsf{d}\eta$ według wzoru Cartana:

$$\mathsf{d}f(X) = Xf$$

$$\mathsf{d}\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])$$

Policzmy teraz $\mathsf{dd}\eta(X,Y,Z)$. Oczywiście powinno wyjść zero:

$$\begin{aligned}
0 = \mathsf{dd}\eta(X,Y,Z) = \\
X\mathsf{d}\eta(Y,Z) - Y\mathsf{d}\eta(X,Z) + Z\mathsf{d}\eta(X,Y) - \mathsf{d}\eta([X,Y],Z) + \mathsf{d}\eta([X,Z],Y) - \mathsf{d}\eta([Y,Z],X) = \\
X\left(Y\eta(Z) - Z\eta(Y) - \eta([Y,Z])\right) \\
- Y\left(X\eta(Z) - Z\eta(X) - \eta([X,Z])\right) \\
+ Z\left(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\right) \\
- [X,Y]\eta(Z) + Z\eta([X,Y]) + \eta([[X,Y],Z]) \\
+ [X,Z]\eta(Y) - Y\eta([X,Z]) - \eta([[X,Z],Y]) \\
- [Y,Z]\eta(X) + X\eta([Y,Z]) + \eta([[Y,Z],X]) =
\end{aligned}$$

Jednokolorowe wyrażenia się upraszczają i zostaje

$$\begin{aligned}
= -X\eta([Y,Z]) + Y\eta([X,Z]) - Z\eta([X,Y]) \\
+ Z\eta([X,Y]) + \eta([[X,Y],Z]) - Y\eta([X,Z]) - \eta([[X,Z],Y]) + X\eta([Y,Z]) + \eta([[Y,Z],X]) =
\end{aligned}$$

Jednokolorowe znowu się upraszczają, teraz zostaje

$$= \eta([[X,Y],Z] - [[X,Z],Y] + [[Y,Z],X])$$

Znikanie drugiej różniczki jest więc równoważne tożsamości Jacobiego.

Cofnięcie formy a różniczka. Niech $\varphi : M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Dyskutowaliśmy już cofnięcie różniczki funkcji określone wzorem

$$\varphi^*\mathsf{d}f = \mathsf{d}(f \circ \varphi).$$

Zauważmy, że zachodzi

$$(\varphi^*\mathsf{d}f)(v) = \mathsf{d}f(\mathsf{T}\varphi(v).$$

Korzystając z tej obserwacji można zdefiniować cofnięcie dowolnej k-formy:

$$\varphi^*\omega(v_1,\dots,v_k) = \omega(\mathsf{T}\varphi(v_1),\dots,\mathsf{T}\varphi(v_k))$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta.$$

Jak zachowuje się cofnięcie formy względem różniczki?

Fakt 2

$$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$$

Dowód: Lokalnie każda forma jest sumą wyrażeń postaci

$$f\mathsf{d}g_1 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}g_k.$$

Mamy więc

$$\varphi^*(f\mathsf{d}g_1 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}g_k) = (f \circ \varphi)(\varphi^*\mathsf{d}g_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_k)$$

i

$$\mathsf{d}[\varphi^*(f\mathsf{d}g_1 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}g_k)] = \mathsf{d}(f \circ \varphi) \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_k) = (\varphi^*\mathsf{d}f) \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_k)$$

Z drugiej strony

$$\mathsf{d}(f\mathsf{d}g_1 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}g_k) = \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g_1 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}g_k$$

i

$$\varphi^*\mathsf{d}(f\mathsf{d}g_1 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}g_k) = (\varphi^*\mathsf{d}f) \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_1) \wedge \dots \wedge \varphi^*(\mathsf{d}g_k).$$

□

2 Formy zamknięte i zupełne

Policzmy różniczkę następującej formy różniczkowej określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\alpha = \frac{y\mathsf{d}x - x\mathsf{d}y}{x^2+y^2}$$

$$\mathsf{d}\alpha = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x - \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y =$$
$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x = \frac{x^2-y^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x = 0$$

Okazuje się więc, że forma ewidentnie niezerowa, mająca współczynniki wyrażające się dość skomplikowanymi wzorami i nie będące stałymi funkcjami ma różniczkę równą zero. Już wiemy, że tak powinno być jeśli forma α jest zupełna, to znaczy jeśli $\alpha = \mathsf{d}f$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$. Spróbujmy znaleźć taką funkcję. Dla form określonych na całym $\mathbb{R}^2$ i mających znikającą różniczkę procedura znajdowania odpowiedniej funkcji jest względnie prosta: Niech $\beta = f(x,y)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y$ będzie gładką formą na $\mathbb{R}^2$ taką, że $\mathsf{d}\beta = 0$. Co to oznacza dla współczynników f i g:

$$\mathsf{d}\beta = \frac{\partial f}{\partial y}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + \frac{\partial g}{\partial x}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}\beta = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

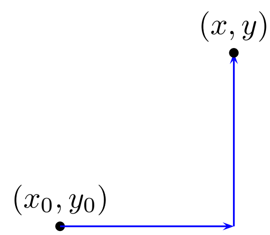
Niech teraz (x_0, y_0) będzie dowolnym punktem $\mathbb{R}^2$. Funkcja

$$h(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t$$

jest gładką funkcją na $\mathbb{R}^2$, ponadto

$$\begin{aligned}\mathsf{d}h(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}y = \\ \left(f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \\ \left(f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \\ \left(f(x,y_0) + f(x,y) - f(x,y_0)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \beta\end{aligned}$$

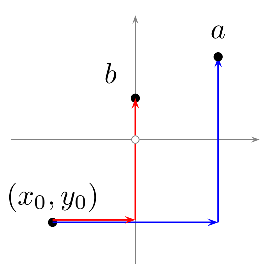
W powyższym rachunku skorzystaliśmy z równości pochodnych cząstkowych funkcji f i g. O powyższej procedurze można myśleć jak o całkowaniu formy β po łamanej składającej się z odcinków od (x_0,y_0) do (x,y_0) i dalej od (x,y_0) do (x,y) jak na rysunku 1. Na kolejnych wykładach mówić będziemy o całkowaniu form i wtedy okaże się, że jest to dokładnie to. Na razie jednak powyższe całki można całkować jako całki z parametrem. Wynik całkowania jest funkcją punktu końcowego. Ponieważ przepis dotarcia do punktu końcowego jest jednoznacznie określony dostajemy dobrze określoną funkcję. Własności całek zapewniają gładkość tej funkcji. Funkcję h nazwiemy *funkcją pierwotną* formy β. Ze względu na dowolność wyboru (x_0,y_0)



Rys. 1: Metoda całkowania

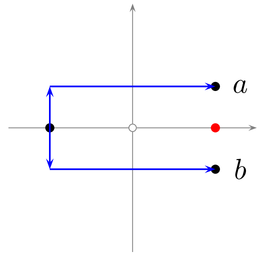
funkcji pierwotnych jest wiele. Dwie funkcje pierwotne tej samej formy β różnią się o funkcję, której różniczka jest równa 0, czyli o funkcję stałą.

Spróbujmy tak samo znaleźć funkcję pierwotną formy α. Napotkamy tutaj na następujący problem: Do punktu b nie możemy dojść „według przepisu” ponieważ musielibyśmy przejść



Rys. 2: Kłopoty w $(0,0)$

przez punkt w którym forma nie jest określona (rysunek 2) . Nie da się więc policzyć jednej z całek występujących we wzorze. Można spróbować obejść ten problem definiując bardziej skomplikowane przepisy dochodzenia do każdego z punktów. Jeśli np. $(x_0,y_0) = (-1,0)$ możemy ustanowić następującą zasadę: do punktów w górnej półpłaszczyźnie dochodzimy idąc najpierw

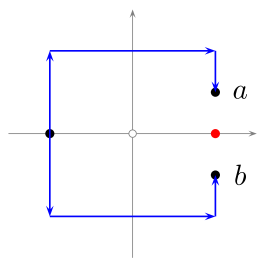


Rys. 3: Omijamy $(0,0)$?

w górę potem poziomo, a w dolnej najpierw w dół, potem poziomo (rysunek 3). Co jednak zrobić z punktami na dodatniej półosi poziomej? Okazuje się, że nie da się wymyśleć takiego przepisu, żeby funkcja pierwotna określona była także w punktach półosi poziomej dodatniej i jednocześnie była ciągła. Jeśli na przykład $a = (1, \epsilon)$ a $b = (1, -\epsilon)$, to zgodnie opisanym powyżej przepisem

$$h(a) = \arctan(\epsilon) + 2\arctan(1/\epsilon), \qquad h(b) = -\arctan(\epsilon) - 2\arctan(1/\epsilon).$$

Gdy ϵ dąży do zera granica „od góry" jest π a od dołu $-\pi$. Może jednak tak jest źle, bo zmniejszanie epsilona oznacza, że trzeba w granicy przejść przez niedozwolony punkt. Co zmieni się, jeśli droga będzie wyglądała jak na rysunku 4? Droga od góry to



Rys. 4: A może lepiej tak...

$$h(a) = \arctan(1) + \arctan(1) - \arctan(-1) - \arctan(\epsilon) + \arctan(1) = \pi - \arctan(\epsilon)$$

a droga od dołu

$$h(b) = -\arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(-1) + \arctan(\epsilon) - \arctan(1) = -\pi + \arctan(\epsilon)$$

Gdy zmniejszamy epsilon droga od góry daje w granicy wartość π, a od dołu $-\pi$. Konstruując funkcję pierwotną do β napotykamy wciąż na trudności. Uzasadnijmy ostatecznie, że zrobić się tego nie da. Najłatwiej będzie użyć dwóch układów współrzędnych typu biegunowego. Proste rachunki pokazują, że w układzie współrzędnych (r, φ) takim, że $r > 0$ i $\varphi \in]0, \infty[$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ określonym na obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0), t \geqslant 0\}$ otrzymujemy $\beta = -\mathsf{d}\varphi$. Jedna z możliwych funkcji pierwotnych (w tym obszarze) to $h_0(r, \varphi) = -\varphi$. Podobny układ współrzędnych możemy zadać tymi samymi wzorami zastępując r przez $\tilde{r}$ i φ przez $\tilde{\varphi}$ w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0), t \leqslant 0\}$ dla $\tilde{\varphi} \in]-\pi, \pi[$. Znowu $\beta = -\mathsf{d}\tilde{\varphi}$ i jedna z możliwych funkcji pierwotnych ma postać $h_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = -\tilde{\varphi}$. Załóżmy teraz, że istnieje funkcja pierwotna f określona na całej dziedzinie formy β. Funkcja ta może różnić się od h_0 i h_1 w obszarze ich określoności co najwyżej o stałą. Niech więc $f = h_0 + \varphi_0$ i $f = h_1 + \varphi_1$. Porównajmy wartości funkcji w punktach $p = (0,1)$ i $q = (0,-1)$.

$$h_0(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_0(q) = \frac{3\pi}{2}, \quad h_1(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_1(q) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(p) = \frac{\pi}{2} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1,$$

$$f(q) = \frac{3\pi}{2} + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow 2\pi + \varphi_0 = \varphi_1$$

Porównanie wartości funkcji f w punktach q i p prowadzi do sprzeczności. Funkcja f pierwotna do β na całej dziedzinie tej formy nie istnieje! Powyższy przykład pokazuje też, że problem leży nie tyle w formie, co w obszarze na którym ta form jest określona.

Definicja 1 Mówimy, że rozmaitość M jest *ściągalna do punktu* $x_0 \in M$ jeśli istnieje gładkie odwzorowanie

$$H : M \times [0,1] \longrightarrow M$$

takie, że

$$\forall x \in M \;\; H(x,1) = x, \qquad \forall x \in M \;\; H(x,0) = x_0.$$

Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest ściągalna do zera: $H(x,y,t) = (tx, ty)$ (i do każdego innego punktu), zaś $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nie jest ściągalna do żadnego punktu. Związek istnienia formy pierwotnej z kształtem obszaru wypowiedziany jest w poniższym twierdzeniu nazywanym *Lematem Poincaré*:

Twierdzenie 1 *Każda forma zamknięta na rozmaitości ściągalnej jest zupełna.*