Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

3 grudnia 2013

1 Formy zamknięte i zupełne cd.

Twierdzenie 1 *Każda forma zamknięta na rozmaitości ściągalnej jest zupełna.*

Dowód: Dowód przeprowadzimy w dwóch wersjach: we współrzędnych na obszarze w $\mathbb{R}^n$ oraz bez użycia współrzędnych na powierzchni. Wersja we współrzędnych ma tę zaletę, że daje się bezpośrednio zastosować do rachunków zmierzających do znalezienia formy pierwotnej. Niech więc $\mathcal{O}$ będzie obszarem gwiaździstym w $\mathbb{R}^n$ względem zera. Obszar nazywamy gwiaździstym względem punktu x_0 jeśli wraz z punktem x zawiera także cały odcinek łączący x_0 z x. Na obszarze gwiaździstym względem zera możemy używać odwzorowania ściągającego

$$F : [0,1] \times \mathcal{O} \ni (t,x) \longmapsto (t \cdot x) \in \mathcal{O}.$$

Dla form na $[0,1] \times \mathcal{O}$ zdefiniujemy także odwzorowanie liniowe

$$K : \Omega^{k+1}([0,1] \times \mathcal{O}) \longrightarrow \Omega^k(\mathcal{O})$$

wzorami

$$K(\alpha(t,x)\mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}) = \left(\int_0^1 \alpha(t,x)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}, \qquad K(\alpha(t,x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_{k+1}}) = 0$$

Pokażemy teraz, że dla dowolnej k-formy α na $\mathcal{O}$ zachodzi wzór

$$\mathsf{d}K(F^*\alpha) + K(\mathsf{d}F^*\alpha) = \alpha. \tag{1}$$

Wzór ten gwarantuje, że jeśli $\mathsf{d}\alpha = 0$ (wtedy także $\mathsf{d}F^*\alpha = 0$) to $\alpha = \mathsf{d}(K(F^*\alpha))$, czyli forma zamknięta ma forme pierwotną. Wzoru (1) dowodzimy bezpośrednim rachunkiem. Ze względu na liniowość wszystkich używanych odwzorowań możemy przeprowadzić rachunek dla formy postaci $\alpha = \alpha(x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$.

$$F^*(\alpha) = \alpha(tx)t^k\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} + \sum_{m=1}^{k} t^{k-1}x^{i_m}(-1)^{m-1}\alpha(tx)\mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \overset{\vee i_m}{\cdots} \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$$

$$K(F^*(\alpha)) = \sum_{m=1}^{k}(-1)^{m-1}x^{i_m}\left(\int_0^1 t^{k-1}\alpha(tx)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \overset{\vee i_m}{\cdots} \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{d}K(F^*(\alpha)) = \sum_{j=1}^n\sum_{m=1}^k(-1)^{m-1}\delta_j^{i_m}\left(\int_0^1 t^{k-1}\alpha(tx)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\overset{\vee i_m}{\cdots}\wedge\mathsf{d}x^{i_k}+\\
\sum_{j=1}^n\sum_{m=1}^k(-1)^{m-1}x^{i_m}\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\overset{\vee i_m}{\cdots}\wedge\mathsf{d}x^{i_k} =\\
k\left(\int_0^1 t^{k-1}\alpha(tx)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}+\sum_{j=1}^n\sum_{m=1}^k(-1)^{m-1}x^{i_m}\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\overset{\vee i_m}{\cdots}\wedge\mathsf{d}x^{i_k}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\mathsf{d}\alpha = \sum_{j=1}^n\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{d}F^*\alpha = F^*\mathsf{d}\alpha = t^{k+1}\sum_{j=1}^n\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}+t^k\sum_{j=1}^n x^j\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}t\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}+\\
\sum_{j=1}^n\sum_{m=1}^k(-1)^m t^k x^{i_m}\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}t\wedge\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\overset{\vee i_m}{\cdots}\wedge\mathsf{d}x^{i_k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K(F^*\mathsf{d}\alpha) = \sum_{j=1}^n x^j\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}+\\
\sum_{j=1}^n\sum_{m=1}^k(-1)^m x^{i_m}\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\overset{\vee i_m}{\cdots}\wedge\mathsf{d}x^{i_k}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Dodajemy wyniki z (2) i (3), czerwone wyrazy się upraszczają i otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{d}K(F^*\alpha)+K(\mathsf{d}F^*\alpha) =\\
k\left(\int_0^1 t^{k-1}\alpha(tx)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}+\sum_{j=1}^n x^j\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k} =\\
\left(\int_0^1\left[kt^{k-1}\alpha(tx)+\sum_{j=1}^n x^j t^k\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\right]\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k} =\\
\alpha(x)\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Dowód w wersj z użyciem współrzędnych został zakończony. Zanim przejdziemy do dowodu bez współrzędnych potrzebujemy kilku ogólnych obserwacji. Weźmy odcinek I otwarty, zawierający $[0,1]$, rozmaitość M i rodzinę odwzorowań

$$
i_t : M\to M\times I, \qquad i_t(x)=(x,t).
$$

Niech ω będzie jednoformą na $M\times I$. Wiadomo, że $\mathsf{T}(M\times I)=\mathsf{T}M\times\mathsf{T}I$ oraz $\mathsf{T}^*(M\times I)=\mathsf{T}^*M\times\mathsf{T}^*I$. Jednoformę ω można więc zapisać jako sumę

$$
\omega = \tilde{\omega}+f\mathsf{d}t,
$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to odwzorowanie $M \times I \to \mathsf{T}^*M$ zachowujące projekcję na M a f to funkcja na $M \times I$. Odnotujmy także, że

$$i_t^*\omega = \tilde{\omega}(t, \cdot).$$

Uzasadnimy teraz, że jeśli $\mathsf{d}\omega = 0$ to $i_1^*\omega - i_0^*\omega$ jest zupełna. Różniczkę $\mathsf{d}\omega$ wyrazić można za pomocą różniczkowania w kierunku M i kierunku I oddzielnie. $\mathsf{d}\omega = \mathsf{d}_M\omega + \mathsf{d}_I\omega = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \mathsf{d}_I\tilde{\omega} + \mathsf{d}_M f \wedge \mathsf{d}t$. Różniczka $\mathsf{d}_M\tilde{\omega}$ nie zawiera czynnika $\mathsf{d}t$. Różniczkę $\mathsf{d}_I\tilde{\omega}$ interpretować można następująco. Skoro $\tilde{\omega}$ jest odwzorowaniem z $M \times I$ w
sT^*M zachowującym rzut na M, to dla ustalonego $x \in M$ odwzorowanie $t \mapsto \tilde{\omega}(x,t)$ jest krzywą w przestrzeni wektorowej T_x^*M. Wektor styczny do tej krzywej dla każdej wartości parametru może być interpretowany jako element tej samej przestrzeni wektorowej. Oznaczmy ten wektor przez $\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}$. Różniczka

$$\mathsf{d}_I\tilde{\omega} = \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Znikanie $\mathsf{d}\omega$ oznacza, że

$$0 = \mathsf{d}\omega = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} + \mathsf{d}_M f \wedge \mathsf{d}t = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \left(\mathsf{d}_M f - \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}\right) \wedge \mathsf{d}t$$

Pierwszy składnik nie zawiera $\mathsf{d}t$, więc znikanie różniczki oznacza znikanie każdego ze składników oddzielnie. W szczególności

$$\mathsf{d}_M f = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Z definicji całki z funkcji o wartościach wektorowych mamy, że

$$i_1^*\omega(x) - i_0^*\omega(x) = \tilde{\omega}(x,1) - \tilde{\omega}(x,0) = \int_0^1 \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}dt = \int_0^1 (\mathsf{d}_M f)(x,t)dt = \mathsf{d}(\int_0^1 f(\cdot,t)dt)(x)$$

Oznaczając

$$g(x) = \int_0^1 f(x,t)dt$$

mamy

$$i_1^*\omega(x) - i_0^*\omega(x) = \mathsf{d}g(x).$$

Identyczny rachunek przeprowadzić można dla k-formy ω.

$$\omega = \tilde{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \eta,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to rodzina k-form na M parametryzowana t a η to podobna rodzina $(k-1)$-form.

$$\mathsf{d}\omega = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} - \mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}_M\eta = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} - \mathsf{d}_M\eta\right).$$

$$\mathsf{d}\omega = 0 \quad \text{oznacza} \quad \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} = \mathsf{d}_M\eta.$$

Niech teraz $I : \Omega^k(M \times I) \to \Omega^{k-1}(M)$ dane będzie wzorem

$$I(\omega)(x) = \int_0^1 \eta(x,t)dt.$$

W szczególności

$$I(\mathsf{d}\omega) = \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - \mathsf{d}_M \eta \right) dt = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - \int_0^1 (\mathsf{d}_M \eta) dt = \tilde{\omega}(1, \cdot) - \tilde{\omega}(0, \cdot) - \mathsf{d} \left(\int_0^1 \eta dt \right).$$

$$I(\mathsf{d}\omega) + \mathsf{d}(I(\omega)) = i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x)$$

Oczywiście gdy $\mathsf{d}\omega = 0$ to

$$i_1^* \omega(x) - i_0^* \omega(x) = \mathsf{d}(I(\omega)).$$

Przejdźmy teraz do właściwego dowodu lematu. Niech M będzie rozmaitością ściągalną do punktu x_0 i niech H będzie odpowiednim odwzorowaniem ściągnięcia

$$H : M \times I \to M.$$

Weźmy także zamkniętą formę α. Oczywiście skoro $\mathsf{d}\alpha = 0$ to także $\mathsf{d}H^*\alpha = 0$. Zgodnie więc powyższymi rachunkami

$$i_1^* H^* \alpha - i_0^* H^* \alpha = \mathsf{d}(I(H^* \alpha)).$$

Pierwszy ze składników to

$$i_1^* H^* \alpha = (H \circ i_1)^* \omega = \omega,$$

bo H złożone z i_1 jest identycznością. W drugim składniku złożenie $(H \circ i_0)$ jest odwzorowaniem stałym: $(H \circ i_0)(x) = x_0$. Cofnięcie formy odwzorowaniem stałym jest zerowe, zatem

$$i_0^* H^* \alpha = (H \circ i_0)^* \omega = 0.$$

Ostatecznie

$$\omega = \mathsf{d}(I(H^* \alpha)).$$

□

2 Całkowanie form różniczkowych

2.1 Orientacja

Mówimy, że dwie bazy e i f w skończenie-wymiarowej przestrzeni wektorowej V mają jednakową orientację jeśli macierz przejścia $[id]_e^f$ ma dodatni wyznacznik. Relacja *jednakowej orientacji* jest, jak łatwo sprawdzić, relacją równoważności w zbiorze baz. Dzieli ona zbiór baz na dwie klasy równoważności, które nazywamy *orientacjami*. Mówimy, że przestrzeń wektorowa jest *zorientowana* jeśli ma wyróżnioną orientację. Ze względu na własności wyznacznika orientacja bazy e zmienia się na przeciwną jeśli zmienimy znak przy jednym z wektorów bazowych lub zamienimy miejscami dwa wektory bazowe. Niektóre przestrzenie wektorowe mają kanoniczną orientację. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ kanoniczna jest orientacja, której reprezentantem jest kanoniczna baza.

Przestrzeń styczna do rozmaitości w punkcie jest skończenie-wymiarową przestrzenią wektorową, więc ma dwie możliwe orientacje. Będziemy mówili, że rozmaitość M jest zorientowana, jeśli przestrzenie styczne we wszytskich punktach mają wybrane orientacje w sposób uzgodniony. Oznacza to, że w dziedzinie każdej mapy $(\mathcal{O}, \varphi)$ orientacje we wszystkich punktach są zgodne lub we wszystkich punktach przeciwne niż orientacja zadana przez bazę $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n})$. Zauważmy, że jeśli rozmaitość jest zorientowana to można na niej wybrać atlas zgodny z orientacją. Istotnie, niech $(\mathcal{O}_i, \phi_i)_{i\in I}$ będzie dowolnym atlasem na M. Konstruujemy nowy atlas $(\mathcal{U}_i, \psi_i)_{i\in I}$ w następujący sposób: Jeśli mapa $(\mathcal{O}_i, \phi_i)$ jest zgodna z orientacją pozostawiamy ją bez zmian kładąc $\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i$, $\psi_i = \phi_i$. Jeśli baza pochodząca od mapy $(\mathcal{O}_i, \phi_i)$ ma orientację przeciwną kładziemy $\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i$ oraz jeśli $\phi_i = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ kładziemy $\psi_i = (-x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Orientację na rozmaitości można też zadać wskazując atlas, w którym wyznaczniki wszystkich macierzy przejścia między pochodzącymi od współrzędnych bazami przestrzeni stycznych są dodatnie.

Okazuje się, że nie na wszystkich rozmaitościach da się wybrać orientację. Takie, na których się nie da nazywają się *nieorientowalne*. Najbardziej znanym przykładem rozmaitości nieorientowalnej jest wstęga Moebiusa. Ten przykład zostanie przeanalizowny na ćwiczeniach. Orientowalne są wszystkie powierzchnie zanurzone, które są poziomicami odwzorowania spełniającego warunki jak w twierdzeniu o definiowaniu powierzchni zanurzonej. Przyjrzyjmy się bliżej sytuacji, gdy powierzchnia S jest poziomicą funkcji

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Jej przestrzeń styczna w punkcie jest jądrem pochodnej F' i jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^n$. Ze względu na istnienie kanonicznego iloczynu skalarnego można napisać

$$\mathbb{R}^n = \mathsf{T}_x S \oplus \langle gradF(x)\rangle.$$

Ze względu na założenia $gradF$ jest nieznikającym polem wektorowym w punktach S o wartościach w $\mathbb{R}^n$. Orientację powierzchni S można wybrać np. w taki sposób aby w każdym punkcie baza $(gradF, f)$, gdzie f jest bazą $\mathsf{T}_x S$ była zgodna z kanoniczną orientacją $\mathbb{R}^n$. Łatwo sprawdzić, że taki sposób wyboru orientacji jest zgodny.

2.2 Gładki rozkład jedności

Powierzchnie na których pracujemy są rozmaitościami parazwartymi. Oznacza to, że dla każdego pokrycia otwartego istnieje drobniejsze od niego pokrycie, które jest lokalnie skończone. Warunek *lokalnej skończoności* oznacza, że każdy punkt rozmaitości ma otoczenie, którego przecięcia z elementami pokrycia są niepuste jedynie dla skończonej liczby elementów pokrycia. Składowa spójna rozmaitości parazwartej ma też własność, która nazywa się *przeliczalnością w nieskończoności*. Oznacza to, że istnieje wstępujący ciąg zbiorów zwartych $(\mathcal{K}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że $\mathcal{K}_j \subset \mathfrak{Int}(\mathcal{K}_{j+1})$ oraz $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_i = M$.

Definicja 1 *Gładkim rozkładem jedności* na M związanym z atlasem $(O_a, \varphi_a)_{a\in A}$ nazywamy układ gładkich funkcji α_i o następujących własnościach: (1) $\forall i \in I\ \exists a \in A \quad \operatorname{supp} \alpha_i \subset O_a$, (2) każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie $\mathcal{W}$ takie, że $\mathcal{W} \cap \operatorname{supp} \alpha_i \neq \emptyset$ jedynie dla skończonej liczby funkcji α_i, (3) $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$, $\forall p \in M \sum_{i\in I} \alpha_i(p) = 1$.